

Lebesgue 積分の応用 (Applications of Lebesgue Integral Theory)

平場 誠示 (HIRABA, Seiji)

目次

1	準備	1
1.1	測度論概要 1 Lebesgue 積分の定義	1
1.2	測度論概要 2 収束定理と Fubini の定理	2
2	L^p 空間	5
2.1	Banach 空間, Hilbert 空間	5
2.2	Hölder の不等式, Minkovsky の不等式	6
2.3	完備性	6
2.4	収束概念	7
3	Fourier 変換	8
3.1	L^p 空間での稠密集合 C_c^∞	8
3.2	L^1 での Fourier 変換	9
3.3	L^2 での Fourier 変換	12
4	特性関数 (Characteristic Functions)	14
4.1	確率測度の Fourier 変換	14
4.2	Lévy の反転公式	15
4.3	測度の弱収束	16
5	超関数 (Distributions)	17
5.1	急減少関数と緩やかな超関数のフーリエ変換	20
5.2	超関数の偏微分方程式への応用	22
5.2.1	熱方程式	22
5.2.2	波動方程式	23

参考書

- 「測度・積分・確率」 梅垣, 大矢, 塚田 共著 (共立出版)
- 「ルベーグ積分入門」 吉田 伸生 著 (遊星社)
- 「関数解析入門」 洲之内 治男著 (サイエンス社)

1 準備

まず必要となる測度論・ルベーグ積分論の概要について復習しておく。

1.1 測度論概要 1 Lebesgue 積分の定義

(X, \mathcal{F}, μ) を測度空間 (measure space) とする. 即ち, X は集合, その全部分集合族を 2^X として, $\mathcal{F} \subset 2^X$ は σ 集合体 (σ -field), i.e.,

$$(1) \emptyset \in \mathcal{F}, \quad (2) A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}, \quad (3) A_n \in \mathcal{F} (n \geq 1) \implies \bigcup A_n \in \mathcal{F}.$$

また $\mu = \mu(dx)$ は測度 (measure), i.e., $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ は集合関数で, 次をみたく;

$$(1) \mu(\emptyset) = 0, \quad (2) A_n \in \mathcal{F}: \text{互いに素} \implies \mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum \mu(A_n).$$

さらにその上の可測関数 (measurable function) $f: X \rightarrow \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ を考える. f は $\forall a \in \mathbf{R}, \{f \leq a\} = \{x \in X; f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$ をみたく.

この可測関数 f を用いて, Lebesgue 積分

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f(x) \mu(dx)$$

を定義する. まず, f が単関数のとき, 即ち, $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$ を X の分割, $a_k \in \mathbf{R}$ として

$$f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k} = \sum_{k=1}^n a_k I(A_k) \implies \int f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

ここで, $1_A(x) = I(A)(x) = 1$ if $x \in A$, $= 0$ if $x \notin A$ は定義関数と呼ばれる.

さらに $f \geq 0$ のとき, 単関数の近似列 $\{f_n\}; 0 \leq f_n \uparrow f$ が取れるので,

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

例えば

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right) + nI(f \geq n),$$

このとき

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right) + n\mu(f \geq n) \right)$$

と定義する. さらに一般のときは, $f^+ = f \vee 0 = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f) \vee 0 = \max\{-f, 0\}$ とおくと $f^\pm \geq 0$ かつ $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ で, $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ の少なくとも一方が有限のとき, Lebesgue 積分可能であるといい,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

として定義する. また $f \in L^1 = L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $\int |f| d\mu < \infty$ で定義し, このとき f は可積分であるという.

ここで我々が自然に扱ってきた最も重要な測度として, Lebesgue 測度を挙げておく.

$\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ を n 次元 Borel field, i.e., \mathbf{R}^n の開集合の全体 \mathcal{O}^n から生成される σ -field $\sigma(\mathcal{O}^n)$ ($= \mathcal{O}^n$ を含む最小の σ -field) とする.

定理 1.1 (\mathcal{B}^n 上の Lebesgue 測度 (Lebesgue measure on \mathcal{B}^n)) $X = \mathbf{R}^n, \mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ とする. このとき $A = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k]$ ($-\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty$) に対し, $\mu(A) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ をみたす測度 μ が一意に存在する.

定義 1.1 上の定理の μ を \mathcal{B}^n 上の Lebesgue 測度 といひ, 記号で $|\cdot|$ や dx また $m = m(dx)$ などと表す.

色々な問題を考える上で, このままでは少し都合の悪いことがあり, そのために次のように少し拡張しておく必要がある.

定理 1.2 $\mathcal{N} = \{N \subset \mathbf{R}^n; \exists B \in \mathcal{B}^n; m(B) = 0, N \subset B\}$ (m 零集合全体) として,

(1) $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) := \{A \cup N : A \in \mathcal{B}^n, N \in \mathcal{N}\}$ は σ -field となる.

(2) $A \cup N \in \mathcal{L}^n$, i.e., $A \in \mathcal{B}^n, N \in \mathcal{N}$ に対し, $\bar{m}(A \cup N) := m(A)$ とおくと, これは $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n)$ 上の測度となる.

定義 1.2 上の定理の \bar{m} を再び同じ記号 m で表し, (完備化された) Lebesgue 測度 といひ, \mathcal{L}^n を Lebesgue 集合体, その元を Lebesgue 可測集合, さらに $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ を Lebesgue 測度空間と呼ぶ.

ちなみに, この零集合はリンゴの薄皮のようなもので, 変な剥き方をすると, Borel 集合ではないかも知れないが, 皮全体が測度 (体積) 0 なので, その一部も当然そうあるべき, そうあって欲しいということで, そうなるように σ -field と測度を拡張することが, 完備化である.

1.2 測度論概要 2 収束定理と Fubini の定理

以下では f, f_1, f_2, \dots をある測度空間 (X, \mathcal{F}, μ) 上の可測関数とする.

$\mu(\lim f_n \neq f) = 0$ のとき f_n は f に概収束するといひ, $f_n \rightarrow f, \mu$ -a.e. と表す. a.e. は almost everywhere の略. (ちなみに確率論では $\mu = P$ として P -a.s. と表し, a.s. は almost surely の略.)

定理 1.3 (単調収束定理 (Monotone Convergence Theorem))

$[0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ かつ $f_n \rightarrow f]$, μ -a.e., i.e., $0 \leq f_n \uparrow f, \mu$ -a.e. ならば

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

補題 1.1 (Fatou の補題 (Fatou's Lemma)) $f_n \geq 0, \mu$ -a.e. ($\forall n \geq 1$) であれば

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

定理 1.4 (Lebesgue の収束定理 (Lebesgue's Convergence Theorem))

$f_n \rightarrow f, \mu$ -a.e. かつ $\exists h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu); |f_n| \leq h$ ($\forall n \geq 1$), μ -a.e. ならば, $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ で

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

正確には Lebesgue の優収束定理 (Dominated Convergence Theorem) という. 特に $\mu(X) < \infty$ で h が定数としてとれるときには Lebesgue の有界収束定理 (Bounded Convergence Theorem) という.

問 1.1 X 上の \mathcal{F} -可測関数 f, f_n ($n = 1, 2, \dots$) に対し, 次を示せ.

$f_n \rightarrow f, \mu$ -a.e. かつ, $|f_n| \leq 2|f|, \mu$ -a.e. で, $\sup_{n \geq 1} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ を満たすなら,

$$f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu), \quad \text{かつ,} \quad \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

実際の応用として, 次のようなバージョンは良く使われる.

定理 1.5 $t \in \mathbf{R}$ に対し, $f_t = f_t(x)$ を可測関数とする. ある $t_0 \in \mathbf{R}$ に対し, $f_t \rightarrow f_{t_0}$ ($t \rightarrow t_0$), μ -a.e. かつ $\exists h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, $\exists U(t_0)$: t_0 の近傍; $|f_t| \leq h$ ($\forall t \in U(t_0)$), μ -a.e. ならば, $f_{t_0} \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ で

$$\int f_{t_0} d\mu = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f_t d\mu.$$

問 1.2 $t \in \mathbf{R}$ の関数 $f(t)$ とある $t_0 \in \mathbf{R}$ に対し, 次を示せ.

$$f(t) \rightarrow f(t_0) \ (t \rightarrow t_0) \iff \forall \{t_n\}; t_n \rightarrow t_0, f(t_n) \rightarrow f(t_0) \ (n \rightarrow \infty).$$

定理 1.6 閉区間 $[a, b]$ 上の有界な関数 f が Riemann 可積分ならば, Lebesgue 測度に関して可積分でその値は一致する, 即ち

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) m(dx).$$

ここで, 左辺は Riemann 積分, 右辺は完備化された Lebesgue 測度 m による Lebesgue 積分とする.

最後に積分順序の交換定理である Fubini の定理について述べよう.

定理 1.7 $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ を σ -有限測度空間とする, i.e., $\exists \{X_n\} \subset \mathcal{F}; \bigcup X_n = X, \mu(X_n) < \infty$ で, ν も同様とする. このとき $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} := \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$ として, $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ 上に次を満たす測度 η が一意に存在する:

$$A \times B \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \quad \text{に対し} \quad \eta(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

定義 1.3 上の測度 η を直積測度 (product measure) といい, $\eta = \mu \otimes \nu$ で表す. また $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$ を直積測度空間 (product measure space) という.

定理 1.8 (Fubini の定理) $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ を σ -有限測度空間とする. 次が成立する:

(1) $f \geq 0, \mu \otimes \nu$ -a.e. とすると

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X d\mu \int_Y f d\nu = \int_Y d\nu \int_X f d\mu.$$

(2) f を一般の可測関数とする. このとき

$$\int_{X \times Y} |f| d\mu \otimes \nu, \quad \int_X d\mu \int_Y |f| d\nu, \quad \int_Y d\nu \int_X |f| d\mu$$

のうち1つでも有限ならば, その他も有限であり,

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X d\mu \int_Y f d\nu = \int_Y d\nu \int_X f d\mu.$$

ちなみに上の式は普通の Lebesgue 測度のときには次のように表す.

$$\int_{\mathbf{R}^2} f dx dy = \int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} f dy = \int_{\mathbf{R}} dy \int_{\mathbf{R}} f dx.$$

注意 1.1 Lebesgue 測度 $m(dx) = dx$ については $a \in \mathbf{R}$ として

[推移不変性] $m(A+a) = m(A)$ ($|A+a| = |A|$), i.e., $m(dx+a) = m(dx)$,

[対称性] $m(-A) = m(A)$ ($|-A| = |A|$), i.e., $m(-dx) = m(dx)$

が成り立つが, これにより次の積分の変数変換が成り立つ.

$$\int_{\mathbf{R}} f(a-x) dx = \int_{\mathbf{R}} f(y) dy$$

ここで注意したいのは Riemann 積分のときのように $y = a - x$ に対し, $dy = -dx$, i.e., $dx = -dy$ として形式的にこれを代入してはいけないということである. 正確には $dx = m(dx) = m(-dy) = m(dy) = dy$ となるのである. つまり上の計算は次のようになる.

$$\int_{\mathbf{R}} f(a-x) dx = \int_{\mathbf{R}} f(a-x) m(dx) = \int_{\mathbf{R}} f(y) m(-dy) = \int_{\mathbf{R}} f(y) dy$$

$(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とする. その上の可測関数 f, g に対し,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy$$

とおく. これを f と g の畳み込み (convolution) という. 但し, この積分が定義できるような適当な f, g を考えるとする. 明らかに, $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h) (= f * g * h$ と表す).

問 1.3 $f, g \in L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ なら

$$\int_{\mathbf{R}} (f * g)(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx \int_{\mathbf{R}} g(y)dy$$

を示せ.

(まず $|f|, |g|$ に Fubini の定理を用いる)

問 1.4 $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ とする. g が微分可能で, しかも g' が有界なら $f * g$ は微分可能で

$$(f * g)'(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)g'(x-y)dy$$

で与えられることを示せ. 特に $g \in C_c^\infty$ なら, $f * g$ もそうで, $(f * g)^{(n)} = f * g^{(n)}$. 更に $f, g \in C_c^\infty$ なら, 一般に $(f * g)^{(n)} = f^{(k)} * g^{(n-k)}$ ($0 \leq k \leq n$).

2 L^p 空間

本節では $1 \leq p \leq \infty$ に対し, p 乗可積分関数の全体 L^p についてノルムと呼ばれる大きさに相当する概念を導入する. そこで Hölder の不等式, Minkovsky の不等式という重要な道具を紹介・証明し, さらに L^p 空間の位相的構造についても述べる.

(X, \mathcal{F}, μ) を測度空間とし, その上の関数 f が (\mathcal{F}) 可測であるとき, 簡単に $f \in \mathcal{F}$ と表すことにする. (本来, \mathcal{F} は集合族なので, $f \in \mathcal{F}$ という表記は正しくないのだが, f が関数ということがハッキリしている時, そう表しても混乱することはないので.)

定義 2.1 $L^p = L^p(X, \mathcal{F}, \mu), 1 \leq p \leq \infty$: L^p -空間

(1) $1 \leq p < \infty$ のとき,

$$L^p = L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathcal{F} : \|f\|_p < \infty\} \quad (\text{但し, } \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p})$$

とおき, $f \in L^p$ は p 乗可積分, または L^p -関数であるという.

(2) $p = \infty$ のとき,

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathcal{F} : \|f\|_\infty < \infty\},$$

(但し, $\|f\|_\infty = \text{ess. sup}|f| := \inf\{\alpha : |f| \leq \alpha, \mu\text{-a.e.}\}$: f の本質的上限) とおき, $f \in L^\infty$ は本質的有界関数, または単に L^∞ -関数であるという. (このとき $|f| \leq \|f\|_\infty < \infty, \mu\text{-a.e.}$ となる)

(3) 上の $\|\cdot\|_p$ を L^p -ノルム (norm) といい, $\|\cdot\|_{L^p}$ と表すこともある.

このとき後で示すように $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p \leq \infty$) は Banach 空間 (完備なノルム空間) となる. また $p = 2$ のときには $\langle f, g \rangle = \int fgd\mu$ により L^2 に内積が定義され, $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は Hilbert 空間 (完備な内積空間) となる. 但し, 複素数値のときは $\langle f, g \rangle = \int f\bar{g}d\mu$ と定義する.

2.1 Banach 空間, Hilbert 空間

X を $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ or \mathbf{C} 上の線形空間として, $\|\cdot\|$ がその上のノルムであるとは $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty]$ 関数で $x, y \in X, a \in \mathbf{K}$ に対して次をみたすときをいう:

(1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (2) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

このとき $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間という

また X 上の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列 $\iff \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

X の任意の Cauchy 列 $\{x_n\}$ が収束するとき, i.e., $\exists x \in X; \|x_n - x\| \rightarrow 0$, X は $\|\cdot\|$ に関して完備 (complete) であるといい, このとき $(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間という

また $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が X 上の内積 (inner product) であるとは $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbf{K}$;

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, = 0 \iff x = 0$, (2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (3) $\langle x, ay + z \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

またこのとき $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間という. さらに $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ とおくとノルムとなり, このノルムで完備なとき Hilbert 空間という.

問 2.1 Cauchy 列のある部分列が収束すればそれ自身も同じ極限に収束することを示せ.

問 2.2 $(X, \|\cdot\|)$ complete $\iff \forall \{x_n\} \subset X; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty, \exists \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$ を示せ.

(ヒント) $(\Leftarrow) \{x_n\}$ Cauchy 列なら $\exists \{x_{n_j}\}; \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < 2^{-j}$ となり, x_{n_j} が収束することが示せる.

2.2 Hölder の不等式, Minkovsky の不等式

定理 2.1 $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, 1/p + 1/q = 1$ とする. 但し, 一方が 1 のとき, 他方は ∞ と考える.

- (1) [Hölder の不等式] $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. 特に $f \in L^p, g \in L^q$ なら $fg \in L^1$.
 (2) [Minkowski の不等式] $f, g \in L^p$ に対し, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

(証明) いずれも $p = 1, \infty$ のときは明らか. $1 < p < \infty$ のときを考える. (1) $\|f\|_p = 0$ or $\|g\|_q = 0$ なら $f = 0, \mu$ -a.e. or $g = 0, \mu$ -a.e., 即ち, $fg = 0, \mu$ -a.e. となることから明らか. $\|f\|_p > 0$ かつ $\|g\|_q > 0$ とする. まず $a, b \geq 0$ に対して $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ が成り立つ. 実際 b を定数と見て $\varphi(a) = \text{右辺} - \text{左辺}$ とおくと $\varphi'(a) = 0 \iff a = b^{1/(p-1)}$ で, このとき最小値をとることが分り, $\varphi(b^{1/(p-1)}) = 0$ から $\varphi(a) \geq 0$.

よって $a = |f|/\|f\|_p, b = |g|/\|g\|_q$ を代入し, 両辺を積分してやれば良い.

(2) $q = p/(p-1)$, i.e., $1/p + 1/q = 1$ として

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu$$

において $|f + g|^{p-1} \in L^q$ であることから Hölder の不等式を用いて, さらに $1 - 1/q = 1/p$ に注意すれば求めるものがえられる. ■

問 2.3 上の証明で, 実際に計算して, 成り立つことを確かめよ.

2.3 完備性

定理 2.2 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p \leq \infty$) は μ -a.e. で等しいものを同一視することにより, $\|\cdot\|_p$ をノルムとして, Banach 空間 (完備なノルム空間) となる. また $p = 2$ のときには $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$ により L^2 に内積が定義され, $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は Hilbert 空間 (完備な内積空間) となる. 但し, 複素数値のときは $\langle f, g \rangle = \int f\bar{g} d\mu$ と定義する.

(正確には $f \sim g \iff f = g, \mu$ -a.e. により, 同値関係をいれて, $f \in L^p$ の同値類 $[f] \in L^p / \sim$ に対し, $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ でノルムを定義すると $(L^p / \sim, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間となる. しかし実際に扱うときにはこれらを同一視すれば良いだけなので, 単に $(L^p, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間であるという言い方をすることが多い.)

(定理の証明) $\forall \{f_n\} \subset L^p; \sum_n \|f_n\|_p < \infty$ に対して $\exists f := \sum_n f_n, \mu$ -a.e. かつ $f \in L^p$ を示せばよい. 単調収束定理と Minkowski の不等式, 更に無限和の定義より,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N |f_n| \right\|_p \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

よって $\sum_n |f_n| < \infty, \mu$ -a.e., これから $f = \sum_n f_n$ は μ -a.e. で存在する. しかも

$$\|f\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p < \infty$$

より $f \in L^p$ をえる. ■

問 2.4 f, g を \mathbb{R} 上の可測関数とする. f と g の畳み込み $f * g; f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ に対し,

- (1) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad (2) \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$ を示せ.

問 2.5 $\mu(X) < \infty$ のとき, $1 \leq p < q \leq \infty$ に対し, $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$ となることを示せ.

問 2.6 $\mu(X) < \infty$ のとき, $f \in L^\infty$ に対し, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ となることを示せ.

ヒント $|f| \leq \|f\|_\infty, \mu$ -a.e. から $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ は容易に分る. 逆は $\varepsilon > 0$ に対し, $X_\varepsilon := \{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ とおくと $\mu(X_\varepsilon) > 0$ となることを説明し, $\|f\|_p \geq \mu(X_\varepsilon)^{1/p} (\|f\|_\infty - \varepsilon)$ が成り立つことを用いれば良い.

2.4 収束概念

定義 2.2 (1) $1 \leq p < \infty$ とする. $f_n, f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し f_n は f に p 乗平均収束 or L^p -収束する;

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^p \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

(2) $f_n, f \in \mathcal{F}$ とする. f_n は f に μ -測度収束する;

$$f_n \rightarrow f \text{ in } \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0.$$

ちなみに概収束は

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f, \quad \mu\text{-a.e.} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(f_n \not\rightarrow f) = 0 \\ &\iff \mu\left(\left\{\forall \varepsilon > 0, \exists N; \forall n \geq N, |f_n - f| < \varepsilon\right\}^c\right) = 0 \\ &\iff \mu\left(\left(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \{|f_n - f| < 1/k\}\right)^c\right) = 0 \\ &\iff \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq 1/k\}\right) = 0 \\ &\iff \forall k \geq 1, \mu\left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq 1/k\}\right) = 0 \end{aligned}$$

問 2.7 (1) $1 \leq p \leq \infty$ とする. $f_n \rightarrow f$ in L^p , $f_n \rightarrow g$ in L^p , なら $f = g, \mu\text{-a.e.}$ を示せ.

(2) $f_n \rightarrow f$ in μ , $f_n \rightarrow g$ in μ , なら $f = g, \mu\text{-a.e.}$ を示せ.

問 2.8 μ が σ -有限測度なら “概収束 \implies 測度収束” となることを示せ.

(ヒント) μ が有限のときに示せば十分で,

$$f_n \rightarrow f, \quad \mu\text{-a.e.} \iff \forall k \geq 1, \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq 1/k\}\right) = 0.$$

問 2.9 $f_n, f \in \mathcal{F}$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p d\mu.$$

を示し, “ L^p -収束 \implies 測度収束” となることを確かめよ.

問 2.10 0 に測度収束しても L^1 -収束しない例を挙げよ.

問 2.11 0 に測度収束しても 概収束しない例を挙げよ.

(ヒント) 問 2.10. $[0, 1]$ Lebesgue 測度空間で, 平均 (積分) 値は 1 だが, 関数が 0 にならないところの長さが 0 に収束するもの. 問 2.11. 同様に定義関数列で 0 にならない区間が動き回りながら, その長さは 0 に収束するもの.

定理 2.3 (1) ある $1 \leq p < \infty$ に対し, 関数列が L^p -収束するなら, 測度収束する. 逆は一般にいけない.

(2) μ が σ -有限なら, 概収束すれば測度収束する. 逆は一般にいけない.

(3) 測度収束するなら, 適当な部分列をとれば概収束するようになれる. 即ち

$$f_n \rightarrow f \text{ in } \mu \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)} \implies \exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}; f_{n_k} \rightarrow f, \quad \mu\text{-a.e. (} k \rightarrow \infty \text{)}.$$

(証明) (3) $\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq 1/2^k\}) < 1/2^k$ をみたす部分列がとれるから, Borel-Cantelli の補題 ($\sum \mu(A_k) < \infty \implies \mu(\limsup A_k) = 0$) から $\mu(\lim f_{n_k} \neq f) = 0$ が従う.

問 2.12 上の証明を厳密に述べよ.

3 Fourier 変換

以下、本節では $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とし、 $1 \leq p < \infty$ とする。簡単のため $L^p \equiv L^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ と表す。

3.1 L^p 空間での稠密集合 C_c^∞

コンパクトな台をもつ無限回微分可能な関数の全体を $C_c^\infty \equiv C_c^\infty(\mathbf{R})$ とする。ここで関数 f の台とは $\text{supp } f := \overline{\{f \neq 0\}}$ で定義される。(\bar{A} は集合 A の閉包を表す。)

定理 3.1 $1 \leq p < \infty$ とする。 C_c^∞ は L^p で稠密、i.e., $\forall f \in L^p, \exists \{f_n\} \subset C_c^\infty; \|f - f_n\|_p \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

(証明) $f1_{[-n,n]}$ を考えることにより、初めから $\text{supp } f$ はコンパクトと置いて良い。さらに単関数で近似することにより、 $f = 1_B; B \in \mathcal{B}, |B| < \infty$ のときに示せば良い。

(より詳しくは、 $f = f^+ - f^-$ として、 f^\pm をそれぞれ、単関数で近似するのだが、 L^p 関数であることから $f^\pm < \infty$ a.s. で、測度論概 1 で挙げた具体的な単関数 f_n^\pm を用いれば、その差が a.s. で $1/2^n$ 以下となり、しかも $\text{supp } f$ コンパクトより、任意の $p \geq 1$ に対し、 L^p 収束することが言える。)

Lebesgue 測度の正則性から $\forall \varepsilon > 0, \exists K; \text{コンパクト}, \exists G; \text{開集合};$

$$K \subset B \subset G; |G \setminus K| < \varepsilon.$$

これから $\exists \phi = \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbf{R}); 0 \leq \phi \leq 1, \phi = 1 \text{ on } K, \phi = 0 \text{ on } G^c$. 従って

$$\int |1_B - \phi|^p dx \leq |G \setminus K| < \varepsilon.$$

故に $\varepsilon = 1/n$ として $f_n = \phi_\varepsilon$ ととれば良い。 ■

問 3.1 $f \in L^p$ なら $f_n = f1_{[-n,n]}$ に対し、 $f_n \rightarrow f$ in L^p を示せ。

注意 上の定理の証明と問から、例えば $f \in L^1 \cap L^2$ のとき、近似列 $f_n \in C_c^\infty$ は L^1 ノルム、 L^2 ノルムの元で、共通なものとしてとれることが分る。

[Lebesgue 測度の正則性 $\forall B \in \mathcal{B}; |B| < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists K; \text{コンパクト}, \exists G; \text{開集合}; K \subset B \subset G; |G \setminus K| < \varepsilon]$ に関しては、 \mathcal{A} を $(a, b]$ の形の素な有限和の全体とすれば、加法族で $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. $B \in \mathcal{B}$ に対し、Lebesgue 測度 $m(B)$ は外測度でもあるので、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_n \in \mathcal{A}; B \subset \bigcup A_n, m(B) \leq \sum m(A_n) < m(B) + \varepsilon/4.$$

更に $A_n \in \mathcal{A}$ の集合の形から、開集合 $G_n \supset A_n$ を $m(G_n) < m(A_n) + \varepsilon/2^{n+2}$ となるようにとることができる。従って $G := \bigcup G_n$ が求めるもの。また B^c に対し、これを用いて $\exists F \subset B$ 閉集合; $m(B \setminus F) < \varepsilon/4$. 更に、これをコンパクト集合 $K \subset F$ で近似すれば、 $m(F \setminus K) < \varepsilon/4$, それを求めるもの。

$[\exists K; \text{コンパクト}, \exists G; \text{開集合}; K \subset G$ に対し、 $\exists \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}); 0 \leq \phi \leq 1, \phi = 1 \text{ on } K, \phi = 0 \text{ on } G^c]$ については $\exists x_1, \dots, x_n \in K, \exists r_1, \dots, r_n > 0; K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_k) \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{B(x_k, 2r_k)} \subset G$ とできることに注意して (次の問参照), $\psi_k \in C_c^\infty(\mathbf{R}) (k = 1, \dots, n)$ を $0 \leq \psi_k \leq 1, \psi_k = 1 \text{ on } \overline{B(x_k, r_k)}, \psi_k > 0 \text{ on } B(x_k, 2r_k), \psi_k = 0 \text{ on } B(x_k, 2r_k)^c$ として作る (作れることについては次の次の問をみよ). 更に $\Psi = \sum_{k=1}^n \psi_k, \Phi = \prod_{k=1}^n (1 - \psi_k)$ とすれば、 $\Psi = 0 \text{ on } (\bigcup_{k=1}^n B(x_k, 2r_k))^c, \Psi > 0 \text{ on } \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 2r_k), \Phi = 0 \text{ on } \bigcup_{k=1}^n \overline{B(x_k, r_k)}$. これから $\phi := \Psi/(\Psi + \Phi)$ とおけば良い。

問 3.2 $K: \text{cpt}, G: \text{open}; K \subset G$ に対し、 $\exists x_1, \dots, x_n \in K, \exists r_1, \dots, r_n > 0; K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_k) \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{B(x_k, 2r_k)} \subset G$ を示せ。

問 3.3 $0 < r < R < \infty$ に対し、 $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}); \psi = 1 \text{ on } \overline{B(0, r)}, \psi > 0 \text{ on } B(0, R), \psi = 0 \text{ on } B(0, R)^c$ なるものを作れ。

$$f(t) = e^{-1/t} 1_{(0, \infty)}(t) \text{ は } C^\infty \text{ で, } f(t) = 0 \iff t \leq 0. \text{ また } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1. \\ \psi(x) = f(R^2 - |x|^2) / \{f(R^2 - |x|^2) + f(|x|^2 - r^2)\}.$$

定理 3.2 $1 \leq p < \infty$ とする. $f \in L^p$ なら $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$.

(証明) 前の結果から $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c^\infty; \|f - g\|_p < \varepsilon/2$. $f_h(x) := f(x+h)$ と表すと簡単な計算により, $\|f_h - g_h\|_p = \|f - g\|_p$. また平均値の定理より, $\exists \theta \in (0, 1); g_h(x) - g(x) = hg'(x + \theta h)$ で,

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{\mathbf{R}} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq |h| \|g'\|_\infty |\text{supp } g|.$$

ここで $\|g'\|_\infty = \sup |g'|$. 従って

$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\|f - g\|_p + |h| \|g'\|_\infty |\text{supp } g| \rightarrow 2\|f - g\|_p < \varepsilon$
($h \rightarrow 0$) となり, 求める結果を得る. ■

3.2 L^1 での Fourier 変換

定義 3.1 $f \in L^1$ に対し,

$$\mathcal{F}f(z) \equiv \hat{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-izx} f(x) dx$$

を f のフーリエ変換 (Fourier transform) という.

命題 3.1 $f \in L^1$. $a, b \in \mathbf{R}$ を定数として, $h(x) = \overline{f(-x)}, f(x+a), e^{ibx} f(x)$ それぞれの Fourier 変換は $\widehat{h}(z) = \overline{\hat{f}(z)}, e^{iaz} \hat{f}(z), \hat{f}(z-b)$ となる. さらに $g \in L^1$ として, 次が成り立つ.

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(z) \hat{g}(z).$$

(証明) いずれも単純な計算により, 明らかだが, 最後の式を示す. $e^{-izx} = e^{-iz(x-y)} e^{-izy}$ を用いて, Fubini の定理と変数変換により,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f * g)(z) &= \int dx e^{-izx} \int f(x-y) g(y) dy \\ &= \int dx \int e^{-iz(x-y)} f(x-y) e^{-izy} g(y) dy \\ &= \int dy e^{-izy} g(y) \int e^{-iz(x-y)} f(x-y) dx \quad (\text{Fubini の定理}) \\ &= \int dy e^{-izy} g(y) \int e^{-izx} f(x) dx \quad (\text{変数変換}) \\ &= 2\pi \hat{f}(z) \hat{g}(z). \end{aligned}$$

定理 3.3 Gauss 核 $g_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$ に対し,

$$\mathcal{F}g_t(z) = \hat{g}_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-tz^2/2}.$$

(証明) より一般に $\theta \in \mathbf{C}$ に対し, 次が成り立つ.

$$(3.1) \quad \int_{\mathbf{R}} e^{\theta zx} g_t(x) dx = e^{t\theta^2 z^2/2}$$

(これから $\theta = -i$ として求める式を得る.) 両辺は $\theta \in \mathbf{C}$ について正則. 従って, 一致の定理より, $\theta \in \mathbf{R}$ の場合に示せば十分.

$$\theta zx - \frac{x^2}{2t} = -\frac{1}{2t}(x - t\theta z)^2 + \frac{1}{2}t\theta^2 z^2 \quad \text{から} \quad e^{\theta zx} g_t(x) = e^{t\theta^2 z^2/2} g_t(x - t\theta z).$$

よって

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\theta zx} g_t(x) dx = e^{t\theta^2 z^2/2} \int_{\mathbf{R}} g_t(x - t\theta z) dx = e^{t\theta^2 z^2/2} \int_{\mathbf{R}} g_t(x) dx = e^{t\theta^2 z^2/2}.$$

■

問 3.4 上の証明の式 (3.1) の左辺が $\theta \in \mathbf{C}$ の正則関数であることを示せ.

問 3.5 重積分の極座標変換を用いて $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示し, $\int_{\mathbf{R}} g_t(x) dx = 1$ を確かめよ.

定理 3.4 $t > 0$ に対し, $e^{-t|x|}/\sqrt{2\pi}$ の Fourier 変換は $t/(\pi(t^2 + z^2))$: Poisson 核となる. 即ち,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t|x|}\right)(z) = \frac{t}{\pi(t^2 + z^2)}$$

(証明)

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-izx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{izx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t|x|} dx$$

から, これら (第 1 式と第 2 式) を足して 2 で割り, さらに対称性より,

$$(\text{左辺}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t|x|} \cos(zx) dx = \frac{t}{\pi(t^2 + z^2)}.$$

最後の等号は次の問による. ■

問 3.6 上の証明の最後の式の最後の等号を示せ. (部分積分)

定理 3.5 $f \in L^1$ に対し, 次が成り立つ.

$$(1) \| \hat{f} \|_{\infty} := \sup_{z \in \mathbf{R}} | \hat{f}(z) | \leq \| f \|_1 / \sqrt{2\pi}.$$

(2) \hat{f} は \mathbf{R} 上の一様連続関数.

(3) (Riemann-Lebesgue) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$, i.e., $\hat{f} \in C_0(\mathbf{R})$; 無限遠で 0 となる連続関数.

(証明) (1) 次より明らか.

$$\sqrt{2\pi} | \hat{f}(z) | \leq \int | e^{-izx} f(x) | dx \leq \int | f(x) | dx = \| f \|_1.$$

(2) $\forall z, h \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\sqrt{2\pi} | \hat{f}(z+h) - \hat{f}(z) | \leq \int | e^{-i(z+h)x} - e^{-izx} | | f(x) | dx \leq \int | e^{-ihx} - 1 | | f(x) | dx.$$

ここで $| e^{-ihx} - 1 | \leq 2$ かつ $| e^{-ihx} - 1 | \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) で, $f \in L^1$ なので, Lebesgue の収束定理から,

$$\sup_z | \hat{f}(z+h) - \hat{f}(z) | \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int | e^{-ihx} - 1 | | f(x) | dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

(3) $z \neq 0$ として

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(z) = - \int e^{-iz(x+\pi/z)} f(x) dx = - \int e^{-izx} f(x - \pi/z) dx$$

より, 第 1 項と第 3 項を加えると

$$2\sqrt{2\pi} \hat{f}(z) = \int e^{-izx} (f(x) - f(x - \pi/z)) dx.$$

従って定理 3.2 より,

$$| \hat{f}(z) | = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int | f(x) - f(x - \pi/z) | dx \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty).$$
■

定義 3.2 $f \in L^1$ に対し,

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) \equiv \check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{izx} f(z) dz$$

を f のフーリエ逆変換 (Fourier inverse transform) という.

定理 3.6

- (1) [反転公式] $f, \hat{f} \in L^1$ なら $\check{f} \in L^1$ で, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f$, a.e., i.e., $\check{\check{f}} = f$, a.e.
 (2) [一意性] $f, g \in L^1$ に対し, $\hat{f} = \hat{g}$ なら $f = g$, a.e.

この証明のために次の命題を示す.

命題 3.2 Gauss 核 $g_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$ に対し, $x \neq 0$ なら $\lim_{t \downarrow 0} g_t(x) = 0$. 更に $f \in L^1$ に対し, $\lim_{t \downarrow 0} (f * g_t) = f$ in L^1 ,

(証明) $\lim_{t \downarrow 0} g_t(x) = 0$ ($x \neq 0$) は一般に $\alpha > 0, x \in \mathbf{R}$ に対し, $\lim_{v \rightarrow \infty} v^\alpha e^{-vx^2} = 0$ が成り立つことから明らか. 後半は $\int g_t dx = 1$ に注意して, 変数変換 $y/\sqrt{t} = \tilde{y}$ により,

$$(f * g_t)(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x))g_t(y)dy = \int (f(x - \sqrt{t}y) - f(x))g_1(y)dy.$$

よって Fubini の定理を用いて, 更に定理 3.2 と Lebesgue の収束定理を用いると

$$\begin{aligned} \|f * g_t - f\|_1 &\leq \int dx \int |f(x - \sqrt{t}y) - f(x)|g_1(y)|dy \\ &\leq \int dy |g_1(y)| \int |f(x - \sqrt{t}y) - f(x)|dx \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

実際, 定理 3.2 から各 $y \in \mathbf{R}$ に対し, $\int |f(x - \sqrt{t}y) - f(x)|dx \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) で, さらに三角不等式と変数変換により, $\int |f(x - \sqrt{t}y) - f(x)|dx \leq 2\|f\|_1$. これから Lebesgue の収束定理が使えて上の結果を得る. ■

(定理 3.6 の証明) まず Gauss 核 $g_t(x) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{2\pi t}$ に対し, $\check{g}_t = g_t$ が成り立つ. 実際, $\hat{g}_t(z) = e^{-tz^2/2}/\sqrt{2\pi} = g_{1/t}(z)/\sqrt{t}$ と表せて, 式 (3.1) [$\int_{\mathbf{R}} e^{\theta z x} g_t(x) dx = e^{t\theta^2 z^2/2}$] において t を $1/t$ として $\theta = i$ とすれば, $\int_{\mathbf{R}} e^{izx} g_{1/t}(z) dz = e^{-x^2/(2t)}$ を得るので,

$$\check{g}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g_{1/t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} = g_t(x).$$

これから

$$\begin{aligned} (f * g_t)(x) &= (f * \check{g}_t)(x) = \int f(x-y)\check{g}_t(y)dy \\ &= \int dy f(x-y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{izy} \hat{g}_t(z) dz \\ &= \int dz e^{izx} \hat{g}_t(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iz(x-y)} f(x-y) dy \\ &= \int dz e^{izx} \hat{g}_t(z) \hat{f}(z) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}_t \hat{f})(x), \end{aligned}$$

即ち, $f * g_t = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{g}_t)$ が成り立つ. 従って上の命題から $\lim_{t \downarrow 0} (f * g_t) = f$ in L^1 , さらに $\lim_{t \downarrow 0} \hat{g}_t(z) = 1/\sqrt{2\pi}$ と Lebesgue の収束定理から $\lim_{t \downarrow 0} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{g}_t) = \mathcal{F}^{-1} \hat{f} = \check{\check{f}}$ (確かめよ. \rightarrow 次の問). 左辺は等しく, どちらも測度収束とみなせるので $\check{\check{f}} = f$, a.e. (問 2.7 参照)

- (2) $h = f - g$ に対し, $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = 0$ で, (1) から $h = \check{\check{h}} = 0$, a.e. ■

問 3.7 上の証明で $\lim_{t \downarrow 0} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{g}_t) = \check{\check{f}}$ が成り立つことを示せ.

定理 3.7 $f \in L^1$ とする.

(1) $xf(x) \in L^1$ なら $\widehat{f} \in C^1$ で, $(\mathcal{F}f)'(z) = -i\mathcal{F}(xf(x))(z)$.

(2) $f \in C^1$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f' \in L^1$ なら $(\widehat{f}')'(z) = iz\widehat{f}(z)$.

(証明) (1) 次に注意すれば, Lebesgue の収束定理から容易に示せる. $h \neq 0$ に対し,

$$\frac{e^{-ix(z+h)} - e^{-ixz}}{h} = -i\frac{x}{h} \int_0^h e^{-ix(z+s)} ds$$

より,

$$\left| \frac{e^{-ix(z+h)} - e^{-ixz}}{h} \right| \leq \frac{|x|}{|h|} \int_0^{|h|} |e^{-ix(z+s)}| ds = |x|.$$

(2) 仮定から, 部分積分により, 次の真ん中の式の第 1 項が 0 となる.

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-ixz} f'(x) dx = [e^{-ixz} f(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} + iz \int_{\mathbf{R}} e^{-ixz} f(x) dx = \sqrt{2\pi} iz \widehat{f}(z).$$

ここで C_c^∞ の元の Fourier 変換はどのような関数になるのだろうか? これに答えるため, 少し広い関数のクラス; Schwartz クラス $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ を導入しよう.

$$f \in \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in C^\infty, \forall m, n \geq 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m f^{(n)}(x) = 0.$$

上の元 f を (Schwartz の) 急減少関数 (rapidly decreasing function) という.

明らかに $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$. また $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ である.

問 3.8 $f \in \mathcal{S}$ なら $1 \leq p \leq \infty, \forall m, n \geq 0$ に対し, $h(x) = x^m f^{(n)}(x) \in L^p$ を示せ.

命題 3.3 $f \in \mathcal{S}$ に対し, $\widehat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}$, $f = \widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}$ が成り立つ.

(証明) $m, n \geq 0$ とする. $g(x) = x^m f(x)$ とおくと, 仮定から前の定理 (1) を繰り返し用いることができ, $\widehat{g}(z) = \mathcal{F}(x^m f(x))(z) = i^m (\widehat{f})^{(m)}(z)$. さらに $h(x) = g^{(n)}(x) = (x^m f(x))^{(n)} \in \mathcal{S}$ なので, 前定理 (2) を繰り返し用いることができ, $\widehat{h}(z) = (iz)^n \widehat{g}(z) = i^{m+n} z^n (\widehat{f})^{(m)}(z)$ をえる. Riemann-Lebesgue の定理から $\widehat{h}(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) をみたくので, 結局, $z^n (\widehat{f})^{(m)}(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) となり, $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. 同様に $\check{f} \in \mathcal{S}$. $\widehat{\check{f}}, \check{\widehat{f}} \in L^1$ なので, 反転公式から $f = \widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}$. ■

3.3 L^2 での Fourier 変換

L^2 関数に対しては可積分性がないために L^1 のように直接, その Fourier 変換を定義することは出来ない. しかし $L^1 \cap L^2$ が L^2 で稠密であることを用いて, 近似によって定義することが出来る.

まず, 前に注意したように, 「 $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$ は L^1 でも, L^2 でも稠密で, しかも共通の近似列をとることができる。」

L^1 での Fourier 変換に関して, 次を示す.

命題 3.4 $f \in L^1 \cap L^2$ に対し, $\widehat{f}, \check{f} \in L^2$, かつ, $\|\widehat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2 = \|f\|_2$ が成り立つ.

(証明) [1st Step] $f, g \in \mathcal{S}$ に対し, 内積 $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} dx$ を用いて,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \langle \widehat{f}, g \rangle &= \int dz \overline{g(z)} \int e^{-izx} f(x) dx = \int dx f(x) \int e^{-izx} \overline{g(z)} dz \\ &= \int dx f(x) \overline{\int e^{izx} g(z) dz} = \sqrt{2\pi} \int dx f(x) \check{g}(x) = \sqrt{2\pi} \langle f, \check{g} \rangle. \end{aligned}$$

即ち, $\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$ が成り立つ. 従って g を \widehat{f} に置き換えて $\check{f} = f$ を用いれば, $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ をえる.

[2nd Step] $f \in L^1 \cap L^2$ に対し, $\exists f_n \in \mathcal{S}; f_n \rightarrow f$ in L^1 , in L^2 . このとき次を示す.

$$\widehat{f}, \check{f} \in L^2, \widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f} \text{ in } L^2, \check{f}_n \rightarrow \check{f} \text{ in } L^2.$$

$|\widehat{f}(z) - \widehat{f}_n(z)| \leq \|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 故に Fatou の補題から,

$$\|\widehat{f}\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n\|_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2 < \infty.$$

つまり $\widehat{f} \in L^2$. 同様に

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_2 \\ &\leq \sup_{m \geq n} \|f_m - f_n\|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

[3rd Step] $f, g \in L^1 \cap L^2$ に対し, [2nd Step] の近似列 $f_n, g_n \in \mathcal{S}$ をとれば, [1st Step] から, 内積とノルムの連続性より, $\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle \check{f}, \check{g} \rangle$ が成り立つ. 従って $g = f$ とすれば良い. ■

定義 3.3 $f \in L^2$ に対し, $\exists f_n \in L^1 \cap L^2; \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 上の命題により, $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) となる. L^2 の完備性から, \widehat{f}_n の L^2 -極限が存在する. しかもこの極限は近似列の取り方に寄らない (\rightarrow 次の問). それを

$$\mathcal{F}f \equiv \widehat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n \text{ in } L^2$$

と表し, f の (L^2 での) Fourier 変換 という. 同様にして, 同じ近似列 f_n の逆 Fourier 変換 \check{f}_n を用いて, その L^2 -極限

$$\mathcal{F}^{-1}f \equiv \check{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \check{f}_n \text{ in } L^2$$

を f の (L^2 での) 逆 Fourier 変換 という.

問 3.9 上の定義の L^2 -極限 \widehat{f} が近似列の取り方に寄らないことを示せ.

[解] もし別の近似列 $g_n \in L^1 \cap L^2; \|f - g_n\|_2 \rightarrow 0$ があつたとして, $\widehat{g} = \lim \widehat{g}_n$ in L^2 とおく. $\|\widehat{g}_n - \widehat{f}_n\|_2 = \|g_n - f_n\|_2 \leq \|g_n - f\|_2 + \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ から $\|\widehat{g} - \widehat{f}\|_2 = \lim \|\widehat{g}_n - \widehat{f}_n\|_2 = 0$. ゆえに $\widehat{g} = \widehat{f}$, a.e.

定理 3.8 $f, g \in L^2$ とする.

- (1) [Plancherel の等式] $\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$. $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle \check{f}, \check{g} \rangle = \langle f, g \rangle$. 特に $\|\widehat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2 = \|f\|_2$.
- (2) [反転公式] $\check{\check{f}} = \widehat{\widehat{f}} = f$, a.e.

(証明) (1) は上の命題の証明と問から明らか. (2) は $\forall g \in L^2, \langle \check{\check{f}}, g \rangle = \langle \check{f}, g \rangle$ を得るから, 移行して, $g = \check{\check{f}} - f$ とおけば良い. ■

4 特性関数 (Characteristic Functions)

$f \in L^1 = L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ の逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}f(z) \equiv \check{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{izx} f(x) dx$ ($z \in \mathbf{R}$) において, $f \geq 0$ のとき $\mu(dx) = f(x)dx$ とおけば, これは $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の有限測度となる. また上の式において

$$\int_{\mathbf{R}} e^{izx} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}} e^{izx} \mu(dx)$$

と表せる. $f \in L^1$ なら $f^\pm \in L^1$; $f = f^+ - f^-$ より, その変換は差で表せる. 更に $\tilde{\mu} := \mu/\mu(\mathbf{R})$ とおけば, これは確率測度, i.e. $\tilde{\mu}(\mathbf{R}) = 1$ で

$$\frac{1}{\mu(\mathbf{R})} \int_{\mathbf{R}} e^{izx} \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}} e^{izx} \tilde{\mu}(dx).$$

これらのことから, L^1 の Fourier 変換を拡張として, 有限測度の Fourier 変換が定義できる. しかもそれは本質的には確率測度の Fourier 変換として定義すれば良いことになる.

4.1 確率測度の Fourier 変換

$\mu = \mu(dx)$ を $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}^d)$ 上の確率測度として (このとき μ を分布 (distribution) という), 次の $\varphi(z) = \varphi_\mu(z)$ を μ の特性関数 (characteristic function) という.

$$\varphi(z) \equiv \varphi_\mu(z) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle z, x \rangle} \mu(dx) \quad (\langle z, x \rangle = \sum_{k=1}^n z_k x_k).$$

命題 4.1 \mathbf{R} 上の分布 μ の特性関数 $\varphi = \varphi_\mu$ に対し, 次が成り立つ.

- (1) $\varphi(0) = 1, |\varphi(z)| \leq 1, \overline{\varphi(z)} = \varphi(-z)$.
- (2) φ は \mathbf{R} 上の一様連続関数.

- (3) [正定符号性] $\forall n \geq 1, \forall \alpha_k \in \mathbf{C}, \forall z_k \in \mathbf{R} (k = 1, \dots, n)$ に対し, $\sum_{j,k=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} \varphi(z_j - z_k) \geq 0$.

(証明) (1) は容易. (2) は L^1 の Fourier 変換のときと同様. (3) について.

$$\sum_{j,k=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} \varphi(z_j - z_k) = \int \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} e^{i(z_j - z_k)x} \mu(dx) = \int \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{iz_j x} \right|^2 \mu(dx) \geq 0.$$

定理 4.1 特性関数 φ に対し, 次が成り立つ. 但し, $L^1(d\mu) = L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu)$ とする.

- (1) $x \in L^1(d\mu)$ なら $\varphi \in C^1$ で, $\varphi'(z) = i \int x e^{izx} \mu(dx)$.
- (2) $\exists \varphi''(0)$ なら $x^2 \in L^1(d\mu)$.

(証明) (1) は L^1 の Fourier 変換のときと同様. (2) $h \neq 0$ に対し,

$$\psi_h(z) := (\varphi(z+h) + \varphi(z-h) - 2\varphi(z))/h^2$$

(対称差) とおく. このとき

$$(4.1) \quad \psi_h(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izx} \left(\frac{i \sin(hx/2)}{h/2} \right)^2 \mu(dx)$$

と表せる. $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(0) = \varphi''(0)$ より, Fatou の補題を用いて,

$$|\varphi''(0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\sin(hx/2)}{h/2} \right)^2 \mu(dx) \geq \int_{\mathbf{R}} x^2 \mu(dx).$$

問 4.1 上の証明で式 (4.1) と $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(0) = \varphi''(0)$ を示せ.

後半は, $\varphi(h) = \varphi(0) + \varphi'(0)h + \varphi''(0)h^2/2 + o(h^2)$ ($h \rightarrow 0$) を用いれば明らかだが, これ自体は, 微分積分学の基本定理と微分の定義, 即ち, $\varphi(h) - \varphi(0) = \int_0^h \varphi(t) dt$ と $\varphi''(0)$ の定義より言える.

4.2 Lévy の反転公式

L^1 関数の Fourier 変換に対しては逆変換ができるためには可積分であるという条件が必要だった。次の定理はそれをさらに一般化したもので、条件無しで成り立つ。

定理 4.2 (Lévy の反転公式) \mathbf{R} 上の分布 μ とその特性関数 φ に対し, $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ なら

$$\mu((a, b)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-iza} - e^{-izb}}{iz} \varphi(z) dz.$$

より一般的には次が成り立つ。

$$\mu((a, b)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-iza} - e^{-izb}}{iz} \varphi(z) dz - \frac{1}{2} [\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})].$$

(証明) まず $z \neq 0$ に対し, $|(e^{-iza} - e^{-izb})/iz| \leq (b-a)$ に注意して, Fubini の定理から

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-iza} - e^{-izb}}{iz} \varphi(z) dz = \int_{\mathbf{R}} \mu(dx) \int_{-T}^T \frac{e^{iz(x-a)} - e^{iz(x-b)}}{iz} dz.$$

上の最後の z による積分を $J(T, x, z, b)$ とおくと奇関数は消えるので

$$J(T, x, a, b) = 2 \int_0^T \frac{\sin(x-a)z}{z} dz - 2 \int_0^T \frac{\sin(x-b)z}{z} dz.$$

ここで, よく知られているように (\rightarrow 証明の後の問)

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad \text{により,} \quad \int_0^\infty \frac{\sin zx}{z} dz = \begin{cases} \pi/2 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\pi/2 & (x < 0) \end{cases}.$$

これにより

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J(T, x, a, b) = \begin{cases} 0 & (x < a \text{ or } b < x) \\ \pi & (x = a \text{ or } x = b) \\ 2\pi & (a < x < b). \end{cases}$$

一方, \sin の形から $|J(T, x, a, b)| \leq 4 \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz$. 従って Lebesgue の収束定理から

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} J(T, x, a, b) \mu(dx) = \pi \int_{\mathbf{R}} 1_{\{a, b\}}(x) \mu(dx) + 2\pi \int_{\mathbf{R}} 1_{(a, b)}(x) \mu(dx).$$

これから求める式を得る. ■

問 4.2 上の $|J(T, x, a, b)| \leq 4 \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz$. を示し, 更に $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ を複素関数論, もしくは次の計算を続けて確かめよ. (部分積分と $T \rightarrow \infty$)

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^T \left(\int_0^\infty e^{-tu} du \right) \sin t dt = \int_0^\infty du \int_0^T e^{-tu} \sin t dt$$

(前半のヒント) $x > 0$ なら $\forall T > 0$ に対し,

$$\int_0^T \frac{\sin xt}{t} dt = \int_0^{Tx} \frac{\sin z}{z} dz \leq \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz.$$

定理 4.3 (一意性定理) \mathbf{R} 上の分布 μ, ν それぞれの特性関数 φ_μ, φ_ν に対し, $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ なら $\mu = \nu$.

(証明) $(a, b); \mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$ なる区間の全体を \mathcal{I} とする. これを満たさない区間は高々可算個であることに注意すれば (次の問参照), 任意の閉区間 $[a, b]$ を上から近似することにより; $\exists (a_n, b_n) \in \mathcal{I}; (a_n, b_n) \downarrow [a, b]$, 反転公式から $\mu = \nu$ on \mathcal{I} で, 分布の下方連続性から, $\mu([a, b]) = \nu([a, b])$. 従って $\sigma(\{[a, b]; -\infty < a \leq b < \infty\}) = \mathcal{B}$ により, $\mu = \nu$ on \mathcal{B} をえる. ■

問 4.3 \mathbf{R} 上の分布 μ に対し, $\mu(\{a\}) > 0$ なる $a \in \mathbf{R}$ は高々可算個しかないことを示せ.

この先の重要な話題については簡単に紹介だけしておこう。

4.3 測度の弱収束

μ_n, μ を \mathbf{R} 上の分布として, μ_n が μ に収束するというのを次で定義する.

$$\mu_n \rightarrow \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in C_b(\mathbf{R}), \mu_n(f) \rightarrow \mu(f).$$

ここで $\mu(f) = \int f d\mu$ である.

重要な結果としては次のようなものがある.

定理 4.4 φ_n, φ をそれぞれ \mathbf{R} 上の分布 μ_n, μ の特性関数とする. $\mu_n \rightarrow \mu$ なら $\varphi_n \rightarrow \varphi$ (広義一様)

定理 4.5 φ_n を \mathbf{R} 上の分布 μ_n の特性関数とする. $\exists \varphi; \varphi_n \rightarrow \varphi$ (各点収束) かつ, φ が原点で連続なら $\exists \mu; \mathbf{R}$ 上の分布; φ は μ の特性関数. しかも $\varphi_n \rightarrow \varphi$ (広義一様).

5 超関数 (Distributions)

元々、物理学者などが、微分できない関数を微分できるものとして、実際の現象に合うように計算をし、色々な理論を作ってきた。例えば解を持たない微分方程式に対し、その解があるとして解析を進めたり、というように。

数学としては、それは許されないことである。しかし現実の物理現象の解析においては、有効な手法で、これによりうまく現象を説明できたりすることが多く、やめる訳には行かなかった。この数学と物理のせめぎ合いを解決してくれたのが Schwartz である。彼は関数という概念を拡張し、ある関数上の汎関数として、超関数という概念を導入し、その微分や畳込み、Fourier 変換などを定義し、これにより、解けない微分方程式の解が超関数として存在することを示したり、さらに超関数がどういう条件で普通の関数となるかなどの理論を構成した。

その発想は単純で、 $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbf{R})$ を有界な台を持つ無限回連続的の微分可能関数全体とする。ここで、関数 ϕ の台とは $\text{supp } \phi = \{\phi \neq 0\}$ (0 でない部分の閉包) で、これが有界ということは、言い換えれば、コンパクトな台をもつということになる。例えばある関数 f に対し、 $T(\phi) := \int f(x)\phi(x)dx$ ($\phi \in \mathcal{D}$) とおく。この T は \mathcal{D} 上の汎関数であるが、 f によって決まるので $T = T_f$ と表す。ここでもし $f \in C^1$ なら部分積分により、

$$\int f'(x)\phi(x)dx = - \int f(x)\phi'(x)dx = T(-\phi')$$

となるので、左辺を形式的に $T'(\phi)$ と表すことにより、逆にこの式で T の微分 T' が定義できると考えられる。つまりたとえ f が C^1 関数でなくても、 $T'(\phi) := T(-\phi')$ として T' を定義すれば f の可微分性に無関係に T' が定義できることになる。しかも f が例えば、ある関数 $a, b \in C^\infty$ に対し、 $f' + af = b$ on \mathbf{R} という微分方程式をみたすとすれば、 $aT_f(\phi) := \int a(x)f(x)\phi(x)dx$ と定義することにより、明らかに $T = T_f$ も同じ方程式 $T' + aT = b$ on \mathcal{D} をみたす。ちなみにこのとき、解は次で与えられる。

$$f(x) = e^{\int a(x)dx} \left[\int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx + C \right]$$

これから普通の関数を解として持つ微分方程式に対しては、対応する超関数も同じ方程式をみたす。逆に普通の関数としての解を持たない微分方程式でも、超関数にまで拡張して考えれば、解を持つ可能性がある。(この普通の関数としての解を古典解といい、超関数解を拡張された解という。常微分方程式においては、拡張された解は実は古典解となることが分っている。従って実際に超関数が意味を持つのは偏微分方程式においてである。)

$\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbf{R})$ での収束を次で定義する。(元 $\phi \in \mathcal{D}$ は複素数値として、テスト関数と呼ぶ。)

$\phi_n \rightarrow \phi$ in $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists K \subset \mathbf{R}$: cpt; $\forall n \geq 1, \text{supp } \phi_n \subset K, \forall k \geq 0, \phi_n^{(k)} \rightrightarrows \phi^{(k)}$, i.e., $\|\phi_n^{(k)} - \phi^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0$.
即ち、 $\phi_n \in \mathcal{D}$ の全ての台があるコンパクト集合 K に含まれていて、それらが、導関数も含めて 0 へ一様収束する。

定義 5.1 $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$ が (Schwartz の) 超関数 (distribution)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} T$ が \mathcal{D} 上の線形汎関数、i.e., $T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$ ($a, b \in \mathbf{C}, \phi, \psi \in \mathcal{D}$) で、次の意味での連続性をもつときをいう: $\phi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D} ならば $T(\phi_n) \rightarrow 0$.

この超関数の全体を \mathcal{D}' と表す。

コンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}$ に対し、 $\phi \in \mathcal{D}_K \stackrel{\text{def}}{\iff} \phi \in \mathcal{D}, \text{supp } \phi \subset K$ とおくと、超関数の定義は、次のような条件で述べることも出来る。

命題 5.1 $T \in \mathcal{D}' \iff T$ は \mathcal{D} 上の線形汎関数で、 $\forall K \subset \mathbf{R}$: コンパクト, $\exists m \geq 1; 0 \leq \forall k \leq m, \forall \phi_n \in \mathcal{D}_K; \phi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ なら $T(\phi_n) \rightarrow 0$. \iff 即ち、次の意味で有界である: $\forall K \subset \mathbf{R}$: コンパクト, $\exists m \geq 1, \exists C > 0; \forall \phi \in \mathcal{D}_K, |T(\phi)| \leq C|\phi|_m$. 但し、 $|\phi|_m := \sum_{k=0}^m \|\phi^{(k)}\|_\infty$.

[注] 最後の同値の (\Leftarrow) は明らかだが、逆は、次の証明から (同様にして) 分る。

証明 (\Leftarrow) は明らかなので、(\Rightarrow) について、背理法で示す。もし $\exists K$: コンパクト; $\forall m \geq 1, \exists C > 0, \exists \phi_{m,C} \in \mathcal{D}_K, |T(\phi_{m,C})| > C|\phi_{m,C}|_m$ とする。そこで $C = m$ として $\phi_m = \phi_{m,C}$ とおけば、 $|T(\phi_m)| > m|\phi_m|_m$ となる。更に $\psi_m := \phi_m / (m|\phi_m|_m)$ とおけば $\psi_m \in \mathcal{D}_K$ かつ $|T(\psi_m)| > 1$. ところが $\forall k \geq 0, m \geq k$ なら

$$|\psi_m^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{m} \frac{\phi_m^{(k)}(x)}{|\phi_m|_m} \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

従って, $\psi_m \rightarrow 0$ in \mathcal{D} となり, 仮定から $T(\psi_m) \rightarrow 0$ となるが, これは上の式 $|T(\psi_m)| > 1$ に反する. これから有界性がいえて, その有界性から $0 \leq \forall k \leq m, \forall \phi_n \in \mathcal{D}_K; \phi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ なら $T(\phi_n) \rightarrow 0$ が成り立つ. ■

定理 5.1 $f \in L^1$ or $\in L^2$ なら $T_f \in \mathcal{D}'$. この対応 $f \mapsto T_f$ は 1-1 で, これらは同一視でき, $L^1 \cup L^2 \subset \mathcal{D}'$ とみなせる.

証明 先に, $f \in L^2$ のときを考える. $|T_f(\phi)| \leq \|f\|_2 \|\phi\|_2 \leq \|f\|_2 \|\text{supp } \phi\| \|\phi\|_\infty$. よって, $T(\phi) \in \mathcal{D}'$. また, 1-1 については, $T_f = 0$ とすると, $\mathcal{D} = C_c^\infty \subset L^2$: dense なので, $\exists \phi_n \in \mathcal{D}; \phi_n \rightarrow f \in L^2$. よって $0 = T_f(\phi_n) = \langle f, \phi_n \rangle \rightarrow \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$ となり, $f = 0$ a.e. をえる.

$f \in L^1$ のとき, $|T_f(\phi)| \leq \|f\|_1 \|\phi\|_\infty$ より, T_f は有界. さらに, 対応が 1-1 なることについては, 色々な証明があるが, 例えば, $e^{-ix^2} \in C_b$ を ($\|\cdot\|_\infty$ のもとで), C_c^∞ の元で近似すれば, Lebesgue の収束定理により, $\hat{f} = 0$ を得るので, 逆 Fourier 変換により, $f = 0$ a.e. を得る. 他には, $\forall a < b, 1_{(a,b)}$ を C_c^∞ の元で有界各点収束近似することにより, $\int f 1_{(a,b)} dx = 0$ を得る. よって, $\int f 1_A dx = 0$ をみたす集合 $A \subset \mathbb{R}$ の全体が, 全開区間を含む σ -field となるので, 1次元 Borel field \mathcal{B}^1 を含む. 特に, $A_n^+ = \{f \geq 1/n\}$ に対して, $0 = \int_{A_n^+} f dx \geq |A_n^+|/n$ より, $|\{f > 0\}| = |\bigcup A_n^+| \leq \sum |A_n^+| = 0$, 同様に $|\{f < 0\}| = 0$, 即ち, $f = 0$ a.e. を得る. ■

超関数の収束 $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{D}' \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \phi \in \mathcal{D}, T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$

定理 5.2 超関数は任意階の導関数を持ち. それらもまた超関数である. さらに $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{D}' なら $T'_n \rightarrow T'$ in \mathcal{D}' .

証明は超関数の定義と微分の定義; $T'(\phi) = -T(\phi')$ から明らかであろう.

例 5.1 (i) [Dirac の δ 関数] $T = \delta$ を $\delta(\phi) = \phi(0)$ と定義. 明らかに超関数. さらに微分は $\delta^{(n)}(\phi) = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$ で, これも超関数.

(ii) [Heaviside 関数 $H(x) = 1_{\{x \geq 0\}}$] $T = T_H$ も超関数.

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty \phi(x)dx$$

また $H' = \delta$. 実際,

$$T'(\phi) = - \int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0) = \delta(\phi)$$

今後, $T = T_f$ のとき, T と f を同一視して, $T = f$ と表す. 従って, 仮に f が微分できない関数であっても, f' は超関数の意味での微分と解釈する. 例えば $H' = \delta$.

問 5.1 (i) $(d/dx - \lambda)(H(x)e^{\lambda x}) = ?$ (超関数の意味で微分せよ.) [δ].
 (ii) $\text{sgn } x (= -1 \text{ if } x < 0, = 1 \text{ if } x > 0)$ を微分せよ. [2δ].

(i) $T_f(\phi) = \langle f, \phi \rangle$ と表すことにすれば, $T = H(x)e^{\lambda x}$ として,

$$T'(\phi) = -\langle H(x)e^{\lambda x}, \phi' \rangle = - \int_0^\infty e^{\lambda x} \phi'(x)dx = -\phi(0) + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} \phi(x)dx = \delta(\phi) + \lambda \langle H(x)e^{\lambda x}, \phi \rangle$$

(ii) $T'(\phi) = -T(\phi') = - \left(- \int_{-\infty}^0 \phi' dx + \int_0^\infty \phi' dx \right) = -(-\phi(0) - \phi(0)) = 2\phi(0)$.

超関数の微分方程式 複素係数の多項式 $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_j \in \mathbb{C}$) に対し, D を超関数の微分作用素; $DT = T'$ として, 二つの超関数 $S, T \in \mathcal{D}'$ に対する微分方程式

$$S = p(D)T = a_0 T^{(n)} + a_1 T^{(n-1)} + \dots + a_n T$$

を考える.

定理 5.3 任意の超関数は原始関数を持つ. 即ち, $\forall T \in \mathcal{D}', \exists S \in \mathcal{D}'; S' = T$. さらに, 原始関数は定数を除いて一意に定まる. つまり, $T \in \mathcal{D}'; T' = 0$ なら T は定数.

証明 $\phi \in C_c^\infty$ に対し, $K\phi(x) \in C_c^\infty$ を $K(\phi') = \phi$ なるものとして定義する(できる). そこで, 超関数 S を $S(\phi) = -T(K\phi)$ として定義すれば, これが求めるものとなる. 実際, $S'(\phi) = -S(\phi') = T(K(\phi')) = T(\phi)$, i.e., $S' = T$ を満たす. この $K\phi$ の作り方は, (単純に考えて, ϕ' を $(-\infty, x]$ 上で積分すれば, ϕ に戻るからそれで良さそうに見えるかも知れないが, それでは $K(\phi) \in C_c^\infty$ が一般に言えない. そこで,) まず, $\rho \in C_c^\infty$ を $\int_{\mathbf{R}} \rho(x)dx = 1$ なるものとして,

$$K\phi(x) = \int_{-\infty}^x K_1\phi(y)dy; \quad K_1\phi(x) = \phi(x) - \rho(x) \int_{\mathbf{R}} \phi(y)dy,$$

とおけば $K_1\phi, K\phi \in C_c^\infty$ で, $K_1(\phi') = \phi'$ より, $K(\phi') = \phi$ が分る. (\rightarrow これらのことを示せ. $\text{supp } K_1\phi = \text{supp } \phi - \text{supp } \rho$ と $\int_{\mathbf{R}} \phi'(y)dy = 0$ による.) また, ρ については, 例えば, $\rho = \rho_\delta$: フリードリクス (Friedrichs) の軟化子とする, i.e., $\rho_\delta \geq 0$, $\int \rho_\delta dx = 1$, $\text{supp } \rho_\delta = [-\delta, \delta]$. 具体的には, 次のようにとれば良い.

$$\rho_\delta(x) = (C/\delta) \exp[-1/(1-x^2/\delta^2)] 1_{(-\delta, \delta)}(x).$$

さらに, $T' = 0$ なら,

$$T(\phi) = T(K_1\phi) + T(\rho) \int_{\mathbf{R}} \phi(y)dy.$$

$K_1\phi = (K\phi)'$ より, $T(K_1\phi) = -T'(K\phi) = 0$. 従って,

$$T(\phi) = T(\rho) \int_{\mathbf{R}} \phi(y)dy = T_{T(\rho)}(\phi).$$

即ち, $T = T(\rho)$: 定数と同一視できる. ■

微分方程式の基本解 $\delta = p(D)E$ を満たす超関数 $E \in \mathcal{D}'$ を基本解という. 次が成り立つ.

定理 5.4 線形の常微分方程式 $p(D)T = S$ の基本解 E ; $p(D)E = \delta$ は常に作れる. さらに, $S \in \mathcal{D}'$ が有界な台を持つ超関数なら, $S = p(D)T$ の解は $T = S * E$ として求まる.

具体的に $p(D)E = E'' + a_1E' + a_2E = \delta$ の解は, $z(x)$ を $z'' + a_1z' + a_2z = 0, z(0) = 0, z'(0) = 1$ の解とすると, $E(x) = H(x)z(x)$ が基本解となる.

問 5.2 このことを証明せよ.

複素係数の n 階常微分方程式の基本解は常に, 作れるので, $z(x)$ は存在し, $E'(x) = z(0)\delta + H(x)z'(x) = H(x)z'(x)$, $E''(x) = z'(0)\delta + H(x)z''(x) = \delta + H(x)z''(x)$ が部分積分により分る.

n 次の線形常微分方程式で同様にすれば, 基本解 $E(x) = H(x)z(x)$ が求まる.

ここで, 超関数 $S, T \in \mathcal{D}'$ の結合積

$$(T * S)(\phi) := T^y(S^z(\phi(y+z))) \quad (S^z \text{ は変数 } z \text{ への作用を表す.})$$

として定義されるが, $S^z(\phi(y+z))$ が y の関数として \mathcal{D} の元となるためには, S の台が有界であることが, 一つの十分条件となる. ここで, 超関数 S の台とは,

$$\text{supp } S = \left(\bigcup \{G \subset \mathbf{R}; \text{open}, \forall \phi \in \mathcal{D}; \text{supp } \phi \subset G, S(\phi) = 0\} \right)^c$$

例えば, $\text{supp } \delta^{(n)} = \{0\}$ ($n \geq 0$), また, 明らかに $\text{supp } \phi \subset (\text{supp } S)^c$ なら, 即ち, $\text{supp } S \cap \text{supp } \phi = \emptyset$ なら $S(\phi) = 0$.

問 5.3 これらのことを示せ.

[$n \geq 0$ を固定. $x \neq 0$ なら 0 を含まない x の近傍に $\text{supp } \phi$ が含まれていれば, $\phi^{(n)}(0) = 0$ より, $\delta^{(n)}(\phi) = (-1)^n \phi^{(n)}(0) = 0$ となるので, $x \notin \text{supp } \delta$. またもし $0 \notin \text{supp } \delta$ とすると, 0 の近傍に台を持つ $\forall \phi \in \mathcal{D}$ に対し, $\delta^{(n)}(\phi) = 0$ となるが, $\phi^{(n)}(0) \neq 0$ なるものが作れるので矛盾.]

また $T \in \mathcal{D}'$, $\phi \in \mathcal{D}$ に対しては,

$$T * \phi(x) = T^y(\phi(x-y))$$

と定義する.

定理 5.5 $T \in \mathcal{D}'$ とする.

- (i) $\phi \in \mathcal{D}$ に対し, $T * \phi \in C^\infty$ で, $D^n(T * \phi) = T * D^n\phi = D^nT * \phi$.
(ii) $T * \delta = \delta * T = T$. $\delta_a; \delta_a(\phi) = \phi(a)$ とすると, $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. $\delta' * H = \delta$.
(iii) $S \in \mathcal{D}$; $\text{supp } S$ を有界とすると, $S^z(\phi(\cdot + z)) \in C_c^\infty$ で, $T * S = S * T$.

$$D^nT = T * (D^n\delta), \quad D^n(T * S) = D^nT * S = T * D^nS.$$

また $S, T, U \in \mathcal{D}'$ のうち 2 つ以上が有界な台を持てば, $U * (T * S) = (U * T) * S$ が (定義され) 成り立つ.

証明 (i) x を固定し, まず, $n = 1$ で考える. $T * \phi(x) = T^y(\phi(x - y))$ の定義に注意して, $\psi_h(y) := (\phi(x + h - y) - \phi(x - y))/h$, $\psi(y) := \phi'(x - y)$ とおく. 平均値の定理より $\exists \theta \in (0, 1)$;

$$\begin{aligned} |\psi_h^{(k)}(y) - \psi^{(k)}(y)| &= \left| \frac{1}{h}(\phi^{(k)}(x + h - y) - \phi^{(k)}(x - y)) - \psi^{(k+1)}(x - y) \right| \\ &= \left| h\phi^{(k+2)}(x + \theta h - y) \right| \leq |h| \|\phi^{(k+2)}\|_\infty. \end{aligned}$$

よって, $h \rightarrow 0$ なら, $\forall k \geq 0, \psi_h^{(k)} \rightrightarrows \psi^{(k)}$. よって, $T(\psi_h) \rightarrow T(\psi)$. これから, $\exists D(T * \phi) = T * D\phi$ が分る. さらに

$$T^y(\phi'(x - y)) = T^y(\partial_x \phi(x - y)) = T^y(-\partial_y \phi(x - y)) = (T')^y(\phi(x - y)).$$

即ち, $T * D\phi = DT * \phi$. n が一般のときも同様.

- (ii) $T^y(\delta^z(\phi(y + z))) = T^y(\phi(y))$. $\delta_a^y(\delta_b^z(\phi(y + z))) = \phi(a + b) = \delta_{a+b}(\phi)$.

$$(\delta')^y(H^z(\phi(y + z))) = (\delta')^y\left(\int_0^\infty \phi(y + z)dz\right) = -\int_0^\infty \phi'(z)dz = \phi(0) - \phi(\infty) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

(iii) $S^z(\phi(\cdot + z)) \neq 0$ とすると, $\exists y; S^z(\phi(y + z)) \neq 0$. よって S^z の台の定義より, $\exists z \in \text{supp } S \cap \text{supp } \phi(y + \cdot)$ なので, $y + z \in \text{supp } \phi$, i.e., $y \in \text{supp } \phi - \text{supp } S$. よって, $\text{supp } S^z(\phi(\cdot + z)) \subset \text{supp } \phi - \text{supp } S$: bdd. 可微分性については, 既に (i) で示した. また $T * S = S * T$ と $S, T, U \in \mathcal{D}'$ のうち 2 つ以上が有界な台を持てば, $U * (T * S) = (U * T) * S$ については, 簡単に分る. 次に $D^nT = T * (D^n\delta)$ については, (i) と $D^n\delta * \phi = \phi^{(n)}$ に注意して, 実際, $D^n\delta * \phi(x) = D^n\delta^y(\phi(x - y)) = (-1)^n \delta^y(\partial_y^n \phi(x - y)) = \delta^y(\phi^{(n)}(x - y)) = \phi^{(n)}(x)$, これを用いて,

$$(D^nT * \phi)(x) = (T * D^n\phi)(x) = (T * (D^n\delta * \phi))(x) = ((T * D^n\delta) * \phi)(x).$$

さらに $(T * \phi)(0) = T^y(\phi(-y))$ となることから, 上で $x = 0$ とすれば, $D^nT(\phi(\cdot)) = (T * D^n\delta)(\phi(\cdot))$, 即ち, $D^nT(\phi) = (T * D^n\delta)(\phi)$. 最後に $D^n(T * S) = D^nT * S = T * D^nS$ については, 上より, $D(T * S) = (T * S) * D\delta = T * (S * D\delta) = T * DS$. 一方, $T * (S * D\delta) = T * (D\delta * S) = (T * D\delta) * S = DT * S$. ■

この定理より, $T = S * E$ に対し,

$$p(D)T = p(D)(S * E) = S * p(D)E = S * \delta = S$$

5.1 急減少関数と緩やかな超関数のフーリエ変換

急減少関数 $\phi \in \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{\iff} \phi \in C^\infty, \forall m, n \geq 0, \|\phi^{(m)}(x)\|_\infty < \infty$, i.e., $|\phi(x)| \leq \exists C_{m,n} |x|^n$.

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi \in C^\infty, \forall m, n \geq 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n |\phi^{(m)}(x)| = 0$. $C_c^\infty = \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset C^\infty$.

\mathcal{S} での収束 $\phi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall m, n \geq 0, x^m \phi^{(n)}(x) \rightrightarrows 0$.

ここでは Fourier 変換を次で定義する. (前の定義と定数が異なることに注意.)

$$\widehat{\phi}(\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi) := \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} \phi(x) dx.$$

定理 5.6 (i) $\phi \in \mathcal{S}$ に対し, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$, かつ, この対応は連続.

- (ii) $\phi(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$) に対し, $\widehat{\phi}(\xi) = (\sqrt{\pi/a})e^{-\xi^2/(4a)}$

(iii) $\phi \in \mathcal{S}$ なら, フーリエの逆変換公式が成り立つ. $\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$. これより, $\widehat{\widehat{\phi}} = \widehat{\psi}$ なら $\phi = \psi$ が成り立つ.

逆 Fourier 変換を (やはり前と定数が異なるが)

$$\check{\phi}(x) = \mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \phi(\xi) d\xi \left(= \frac{1}{2\pi} \widehat{\phi}(-x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\phi(\cdot)}(x) \right)$$

と定義すれば、最後のは $\phi = \widehat{\check{\phi}}$ となる。もしくは $2\pi\phi(-x) = \widehat{\check{\phi}}(x)$ とも表せる。

証明 (i) の連続性のみ示す。(他は既に L^1 の Fourier 変換で証明済み。) $\phi_k \rightarrow 0$ in S とする。部分積分により、 $(-i\xi)^m \widehat{\phi}^{(n)}(\xi) = (-1)^m \mathcal{F}(d_x^m((-ix)^n \phi(x)))(\xi)$ なので、

$$\begin{aligned} \sup |\xi^m \widehat{\phi}^{(n)}(\xi)| &\leq \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) |d_x^m((-ix)^n \phi(x)| dx \\ &\leq \sup_x (1+x^2) |d_x^m((-ix)^n \phi(x))| \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$\phi = \phi_k$ として、仮定より、 $\sup_x (1+x^2) |d_x^m((-ix)^n \phi_k(x)| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). よって、 $\widehat{\phi}_k \rightarrow 0$ in S . ■

定理 5.7 $\phi, \psi \in S$ に対し、

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}\psi dx = \int_{\mathbf{R}} \phi\widehat{\psi} dx, \int_{\mathbf{R}} \phi\overline{\psi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}} dx, \widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}, \widehat{\phi\psi} = \frac{1}{2\pi} \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$$

2 つ目の等式を Parseval の等式という。ちなみに $\psi = \phi$ とすると $\|\widehat{\phi}\|_2 = 2\pi\|\phi\|_2$ が成り立つ。

証明 Fubini により、

$$\int \widehat{\phi}(x)\psi(x) dx = \int dx \psi(x) \int e^{-ixy} \phi(y) dy = \int dy \phi(y) \int e^{-ixy} \psi(x) dx = \int \phi(y)\widehat{\psi}(y) dy.$$

この結果で、 $\widehat{\psi}$ を $\overline{\psi}$ として、つまり、 ψ を $\check{\psi} = \overline{\widehat{\psi}}/(2\pi)$ と置き換えれば 2 つ目を得る。

$$\int e^{-ix\xi} \phi * \psi(x) dx = \int dx e^{-ix\xi} \int \phi(x-y)\psi(y) dy = \int dy e^{-iy\xi} \psi(y) \int e^{-i(x-y)\xi} \phi(x-y) dx$$

より、3 つ目も分る。これと逆フーリエ変換で $\phi * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi}\widehat{\psi})$ となるが、 ϕ, ψ を $\widehat{\phi}, \widehat{\psi}$ に変えると、 $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi}\widehat{\psi}) = (2\pi)^2 \mathcal{F}^{-1}(\phi(\cdot)\psi(\cdot)) = 2\pi\widehat{\phi\psi}$ となり、最後の式を得る。 ■

緩やかな超関数; 緩減少超関数 (Tempered distributions) $T \in S'$: S 上の連続な線形汎関数;

$$\exists C > 0, \exists m, n \geq 1; \forall \phi \in S, |T(\phi)| \leq C \sum_{0 \leq k \leq m, 0 \leq \ell \leq n} \|(1+|x|)^k \phi^{(\ell)}(x)\|_{\infty}.$$

明らかに $S' \subset \mathcal{D}'$. また $f \in L^1$ or $\in L^2$ なら $T_f \in S'$. この対応 $f \mapsto T_f$ は 1-1 で、これらは同一視でき、 $L^1 \cup L^2 \subset S'$ とみなせる。(→ 示せ.)

(証) $f \in L^1$ のとき、 $|T_f(\phi)| \leq \|f\|_1 \|\phi\|_{\infty}$ より、上の不等式を満たす。 $f \in L^2$ なら、まず、 $|\phi(x)| \leq \|(1+|x|)\phi(x)\|_{\infty}/(1+|x|) \in L^2$ に注意すると、 $\|\phi\|_2 \leq \|(1+|x|)\phi(x)\|_{\infty} \|1/(1+|x|)\|_2$ となるので、 $|T_f(\phi)| \leq \|f\|_2 \|\phi\|_2 \leq C \|(1+|x|)\phi(x)\|_{\infty}$ より、条件の不等式を満たす。この対応が 1-1 なることは、 \mathcal{D}' のときと同様。 ■

さらに $T \in S'$ に対し、フーリエ変換 \widehat{T} を $\widehat{T}(\phi) := T(\widehat{\phi})$ ($\phi \in S$) で定義する。変数を入れて表すと $\widehat{T}^{\xi}(\phi(\xi)) := T^x(\widehat{\phi}(x))$.

また逆 Fourier 変換 \check{T} を $\check{T}(\phi) := T(\check{\phi})$ と定義すると、超関数に対しても、逆フーリエ変換の公式が成り立つ。 .

定理 5.8 (i) $\widehat{\delta} = 1, \widehat{\delta'} = i\xi, \widehat{\delta^{(n)}} = (i\xi)^n, \widehat{\delta_a^{(n)}} = e^{-ia\xi}(i\xi)^n$.

(ii) $T \in S'$ に対し、逆フーリエ変換の公式 $\widehat{\check{T}} = \check{T} = T$ が成り立ち、 $T \mapsto \widehat{T}$ は S' 上の同相写像。

(iii) $\widehat{T} = 0$ なら $T = 0$, 特に、 $f \in L^1, \widehat{f} = 0$ なら $f = 0$ a.e.

証明 (i) $\widehat{\delta_a^{(n)}}(\phi) = \delta_a^{(n)}(\widehat{\phi}) = (-1)^n \delta_a(\widehat{\phi}^{(n)}) = (-1)^n \widehat{\phi}^{(n)}(a) = \int (i\xi)^n e^{-i\xi a} \phi(\xi) d\xi$.

(ii) 逆 Fourier 変換の公式は明らかで、これから $T \mapsto \widehat{T}$ が $cal S'$ 上 1-1 onto が従う。連続性は、 $T_n \rightarrow 0$ とすると、 $\phi \in S$ なら $\widehat{\phi}$ もそうであるから、 $\widehat{T_n}(\phi) = T_n(\widehat{\phi}) \rightarrow 0$ 。ゆえに、 $\widehat{T_n} \rightarrow 0$ 。 ■

$f \in L^2$ なら $T_f \in S'$ で、Fourier 変換 $\widehat{T_f} \in S'$ が定義される。しかも、 $\widehat{T_f} \in L^2$ なる。

定理 5.9 (Plancherel の定理) $f \in L^2$ なら $\widehat{f} \in L^2$ で、 $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ 。

証明 これは既に、 L^2 関数の Fourier 変換で証明済みだが、超関数の理論を用いても示すことができる。

$$|\widehat{f}(\phi)| = |\widehat{T_f}(\phi)| = |T_f(\widehat{\phi})| = |f(\widehat{\phi})| \leq \|f\|_2 \|\widehat{\phi}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \sqrt{2\pi} \|\phi\|_2.$$

最後の等式は Parseval の等式による。 $C_c^\infty \subset S \subset L^2$ で、 C_c^∞ : dense in L^2 より、 S もそう。従って、 \widehat{f} は L^2 上の有界線形汎関数に拡張でき、Riesz の表現定理により、 $\widehat{f} \in L^2$ としてよく、しかも、 $\|\widehat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ なる。さらに、 $\check{f} = \widehat{f(-\cdot)}/(2\pi)$ なので、 $\|\check{f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2/(2\pi)$ で、

$$2\pi\|f\|_2 = 2\pi\|\check{f}\|_2 \leq (2\pi)^{3/2}\|\check{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|\widehat{f}\|_2 \leq 2\pi\|f\|_2$$

となり、全て等式となる。 ■

定理 5.10 $T \in S'$ に対し、(i) $\widehat{T^{(n)}} = (i\xi)^n \widehat{T}$, (ii) $\widehat{(-ix)^n T} = (\widehat{T})^{(n)}$, (iii) $\widehat{1} = 2\pi\delta$ 。

5.2 超関数の偏微分方程式への応用

5.2.1 熱方程式

無限に長い棒で、時刻 t , 場所 x における温度を $u(t, x)$ とすると、次の熱方程式を満たす: $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$ として

$$c\partial_t u = \gamma\partial_x^2 u.$$

ここで、 c は比熱、 γ は熱伝導度である。これを初期条件 $u(0, x) = u_0(x)$ のもとで解くことを考える。

定理 5.11 (熱方程式) $c\partial_t u = \gamma\partial_x^2 u$, $u(0, x) = u_0(x) \in S'$ の (超関数) 解は、

$$u(t, \cdot) = u_0 * v(t, \cdot); \quad v(t, x) = \sqrt{\frac{c}{4\gamma t}} e^{-cx^2/(4\gamma t)}$$

この v は

$$(c\partial_t - \gamma\partial_x^2)v = 0, \quad v(0, x) = 0$$

をみたす。

証明 まず、 x についてフーリエ変換をとると、

$$c\partial_t \widehat{u} = -\gamma\xi^2 \widehat{u}, \quad \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi).$$

これは t についての常微分方程式で、解くと、

$$\widehat{u}(t, x) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-\gamma\xi^2 t/c}$$

ここで、

$$e^{-\gamma\xi^2 t/c} = \sqrt{\frac{c}{4\gamma t}} \mathcal{F}(e^{-cx^2/(4\gamma t)})(\xi)$$

と、さらに例えば、 $u_0 \in S$ であれば、 $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi} \widehat{\psi}$ より、

$$\widehat{u}_0(\xi) e^{-\gamma\xi^2 t/c} = \sqrt{\frac{c}{4\gamma t}} \mathcal{F}(u_0(x) * e^{-cx^2/(4\gamma t)})(\xi) = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{c}{4\gamma t}} \int_{\mathbf{R}} u_0(y) e^{-c(x-y)^2/(4\gamma t)} dy\right)(\xi)$$

従って、逆フーリエ変換を用いて、

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{c}{4\gamma t}} \int_{\mathbf{R}} u_0(y) e^{-c(x-y)^2/(4\gamma t)} dy = u_0 * v(t, \cdot)(x).$$

次に、 u_0 を緩やかな超関数として考える、即ち、 $u_0 \in S'$ とする。上の計算から、超関数として、 $u(t, \cdot) = u_0 * v(t, \cdot)$ とおけば良いことが分る。実際、定理の v が、 $(c\partial_t - \gamma\partial_x^2)v = 0$ を満たすので、 $(c\partial_t - \gamma\partial_x^2)u = u_0 * (c\partial_t - \gamma\partial_x^2)v = 0$ 。さらに初期条件については、 $t \rightarrow 0$ のとき、 $v(t, x) \rightarrow \delta_x$ が成り立つことから分る。

これは本質的には $f_t(x) = (\sqrt{2\pi t})^{-1} e^{-x^2/(2t)}$ に対し、 $f_t(x) \rightarrow \delta$ ($t \rightarrow 0$) を証明することと同じで、 $F_t(x) := \int_{-1}^x f_s(y) dy$ に対し、 $|F_t(x)| \leq \int_{\mathbf{R}} f_t(y) dy = 1$ 。また、 $t \rightarrow 0$ のとき、 $x > 0$ なら

$$F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/\sqrt{t}}^{x/\sqrt{t}} e^{-y^2/2} dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}} f_1(y) dy = 1.$$

$x < 0$ なら $1_{(-\infty, (-1/\sqrt{t}) \vee (x/\sqrt{t}))}(x) \leq 1$, $\rightarrow 0$ なので、Lebesgue の収束定理より、

$$F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} 1_{(-\infty, (-1/\sqrt{t}) \vee (x/\sqrt{t}))}(x) e^{-y^2/2} dy \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

よって $F_t(x) \rightarrow H(x)$ 。これから Lebesgue の収束定理を再び用いれば、 $F_t \rightarrow H$ in S' がいえて、超関数の微分の連続性から、 $f_t \rightarrow \delta$ in S' が成り立つ。 ■

Cauchy 問題 熱方程式の空間微分を一般化して、定数係数の偏微分方程式

$$\partial_t u = p(\partial_x)u, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

を考える。ここで $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_j \in \mathbf{C}$)。特に、 $u_0 = \delta$ のときの解をコーシー問題の基本解といい、 $E(t, x)$ と表す。これが求まれば、 $u_0 \in D'$ 、有界な台をもつときなど、元の方程式の解は $u(t, x) = u_0(x) * E(t, x)$ として求まる。実際、 $\partial_t u = u_0 * \partial_t E = u_0 * p(\partial_x)E = p(\partial_x)(u_0 * E) = p(\partial_x)u$ 、さらに $u(0, x) = u_0 * E(0, x) = (u_0 * \delta)(x) = u_0(x)$ 。

5.2.2 波動方程式

t について高階の偏微分を考える。

定理 5.12 (波動方程式) $\partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$, $u(0, x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$ 。
この解は $u_0, u_1 \in L^1$ なら、

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

で与えられる。これは d'Alembert の公式と呼ばれる。

特に $u_0 = 0, u_1 = \delta$ のときの解 $E(t, x)$ を、コーシー問題の基本解というが、これは $E(t, x) = I(|x| < t)/2$ で与えられる。

証明 まず、 $t > 0$ を固定すると、

$$\partial_x E = \frac{1}{2} (\delta_{-t} - \delta_t), \quad \partial_x^2 E = \frac{1}{2} (\delta'_{-t} - \delta'_t).$$

一方、

$$\partial_t E = \frac{1}{2} (\delta_{-t} + \delta_t), \quad \partial_t^2 E = \frac{1}{2} (\delta'_{-t} + \delta'_t).$$

これから E が基本解であることが分る。さらに、 u_1 が一般のときは、 $u = u_1 * E$ で与えられ、特に $u_1 \in L^1$ なら、

$$u(t, x) = v_1(t, x) := \frac{1}{2} \int_{-t}^t u_1(x-y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy.$$

さらに $u_0 \in L^1$ のとき、

$$v(t, x) := \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_0(y) dy, \quad v_0(t, x) := \partial_t v(t, x) := \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

とおくと、 v が $u(0, x) = 0, \partial_t u(0, x) = u_0(x)$ のときの解であることから、 $(\partial_t^2 - \partial_x^2)v_0 = \partial_t(\partial_t^2 - \partial_x^2)v = 0$ と $v_0(0, x) = \partial_t v_0(0, x) = u_0(x)$, $\partial_t v_0(0, x) = [\partial_x u_0(x) - \partial_x u_0(x)]/2 = 0$ を満たすので、 $u = v_0 + v_1$ とおけば良い。 ■