パーコレーション (Percolation) *

平場　誠示

本講義では「パーコレーション」と呼ばれる, ズポンジへの水の浸透や, 木々への病気の感染という現象を単純化した確率モデルにおいて, その浸透率, あるいは感染率（確率）に応じて, どのような現象が起きるかという, 一風, 変わった確率論の世界を紹介する.

目 次

* (液体の) 浸透, ろ過, 浸出)

1 パーコレーションとは？

1.1 数学的モデルの説明

$\mathbf{Z}^2$ を**正方格子**として, $\mathbf{B}^2 = \{\{x, y\}; x, y \in \mathbf{Z}^2, |x-y| = 1\}$ を格子上の隣合う 2 点を結ぶ辺（**ボンド, bond**）の全体とする.

今, 各ボンドに独立に, 確率 p $(0 \le p \le 1)$ で open, 確率 $1-p$ で closed という状態を与える. このとき $X_b = X_b^{(p)} = X_b^{(p)}(\omega)$ でボンド $b \in \mathbf{B}^2$ の状態を表す確率変数を定義し, $\mathbf{X} = \{X_b; b \in \mathbf{B}^2\}$ で全体のボンドの状態を表すものとする. その分布を P_p とする.

$S = \{b \in \mathbf{B}^2; X_b = 1\}$ として, その中で原点 O を含む連結成分を C_{O} と表し, **原点を含むオープンクラスター (open cluster)** と呼ぶ.

$\|C_{\mathrm{O}}\|$ で C_{O} の中のボンドの個数を表す.

p_H: **Hammersley の臨界確率 (critical probability)** を $\theta(p) = P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty)$ を用いて, 次で定義する:

$$p_H = \inf\{p \in [0, 1]; \theta(p) > 0\}.$$

また p_T**: Temperley の臨界確率**を $\chi(p) = E_p[\|C_{\mathrm{O}}\|] = \sum_{n=1}^{\infty} nP_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = n) + \infty \cdot P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty)$ を用いて, 次で定義する:

$$p_T = \inf\{p \in [0, 1]; \chi(p) = \infty\}.$$

このとき明らかに $p_H \ge p_T$ が成り立つが, 果たして $p_H = p_T$ となるか？またその値はいくらか？さらに無限のオープンクラスターは存在するならその個数はいくつか？という問題が考えられる. それらに対する答えが次の結果である.

定理 1.1 正方格子 $\mathbf{Z}^2$ でのボンドパーコレーションにおいて, 臨界確率 p_H, p_T に対し, $p_H = p_T = 1/2$ が成り立ち, それを p_c と表す. また無限のオープンクラスターは $p > p_c$ のとき, 確率 1 で一意的に存在し, $p \le p_c$ のときは確率 1 で存在しない.

注意 1.1. 一般次元の格子 $\mathbf{Z}^d$ $(d \ge 3)$ では, 上の定理で $p_c = 1/2$ 以外の結果はすべて成り立つ.

ここで次の問のために $\theta(p) = P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty)$ が p に関して単調増加であることを注意しておく. この証明は次節の最後に与えることにして, 直感的には p が大きくなるほど開いたボンドが多くなるので, それが無限である確率は高くなる.

問 1.1 $p_H \ge p_T$ が成り立つことを示せ.

1.2 確率空間と確率変数

確率論においては, 必ず, ある適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ があり, その上で定義されたある確率変数 X を対象として, それの色々な性質について調べて行こうとする.

ここで $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が**確率空間 (probability space)** とは

- Ω はある集合
- $\mathcal{F}$ $(\subset 2^{\Omega})$ は Ω 上の σ **集合体** (σ**-field**); (2^{Ω} は Ω の全部分集合族)

  (1) $\Omega \in \mathcal{F}$

  (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{F}$

- $P = P(d\omega)$ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度 (probability measure)**, i.e., 全測度 1 の測度; $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ は集合関数で次をみたす.

  (1) $P(\Omega) = 1$ (これは $P(\emptyset) = 0$ としても同値)

  (2) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が互いに素 $\Rightarrow P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$ (σ **加法性**)

この確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された可測関数 $X = X(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}$ を**確率変数 (random variable)** という. 即ち, $\{X \le a\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$. さらに一般に $(\Xi, \mathcal{B})$ を可測空間として $X = X(\omega)$ が Ξ 値確率変数であるとは $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall B \in \mathcal{B})$ をみたすときをいう.

X_i を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $(\Xi_i, \mathcal{B}_i)$ に値をとる確率変数とする $(i = 1, 2, \ldots, n)$. このとき $\{X_i\}_{i=1}^n$ が**独立 (independent)** であるとは

$$P(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n) \quad ({}^\forall B_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \ldots, n).$$

さらに上で n が無限のとき $\{X_n\}_{n \ge 1}$ が独立であるとは ${}^\forall N \ge 1$ に対して $\{X_n\}_{n=1}^N$ が独立なときをいう.

$\mu(A) = P(X \in A)$ を X の**分布 (distribution)** といい, $F(x) = P(X \le x)$ を X の**分布関数 (distribution function)** という.

注意 1.2 余談だが, P が単なる測度のときは, 上の定義で対応する部分を $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, $P(\emptyset) = 0$ に換えれば良い. 尚, 確率のときに $P(\emptyset) = 0$ でも良いのに, わざわざ $P(\Omega) = 1$ と書くのは, 全測度が 1 ということを強調するためのようだ. また確率変数の定義は本質的に可測関数と同じなのに, わざわざ違う言葉で, しかも確率測度も含めて定義するのは, やはり確率論においてはまず確率空間があって, その上で全ての事を考えていくので, 確率測度を抜きにして, 関数を考えるのは無意味だから, という思想があるからであろう.

さて我々の話において, 実際に確率空間を定義しなくてはいけないのだが, 確率論は割といい加減な（というか, 直感的な部分をもつ）学問で, その辺りをあまりうるさく言わなくても大体の話は理解できるものである. しかしあくまで数学的に厳密にやりたいという気持ちもあるので, やはり正確に定義を与えることにしよう.

$\Omega = \Xi := \{0, 1\}^{\mathbf{B}^2} \ni \omega = \omega(b); \mathbf{B}^2 \to \{0, 1\}$ とし, 有限個のボンドの状態 (0 か 1) が決められた次のような Ω の部分集合; **筒集合 (cylinder set)**

$$A_{b_1, \ldots, b_n}^{i_1, \ldots, i_n} = \{\omega; \omega(b_1) = i_1, \ldots, \omega(b_n) = i_n\} \quad (b_k \in \mathbf{B}^2, i_k = 0 \text{ or } 1, k = 1, \ldots, n)$$

の全体を $\mathcal{C}$ で表す. $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Xi) := \sigma(\mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ から生成される σ-field, つまり $\mathcal{C}$ を含む最小の σ-field) とおく. 実際には

$$\mathcal{B}(\Xi) = \bigcap \{\mathcal{G} \subset 2^\Omega; \mathcal{G} \quad \text{は } \mathcal{C} \text{ を含む } \sigma\text{-field}\}$$

で与えられる. また確率 $P = P_p$ は上のような cylinder set に対し,

$$P_p(A_{b_1, \ldots, b_n}^{i_1 + \cdots + i_n}) = p^{i_1 \cdots i_n} (1 - p)^{(1 - i_1) + \cdots + (1 - i_n)}$$

をみたすものが一意的に存在する. (これは**測度の拡張定理**を用いて示される.)

別の定義の仕方として, 各ボンド $b \in \mathbf{B}^2$ ごとに確率空間 $(\Omega_b, \mathcal{F}_b, P_{b,p})$ を $\Omega_b = \{\omega(b) = 1, \omega(b) = 0\}$, $\mathcal{F}_b = 2^{\Omega}_b$, $P_{b,p}(\omega(b) = 1) = p$ で決め, さらにそれらの無限直積で全体の確率空間を決めることも出来る.

確率変数 $X_b = X_b^{(p)}$ は $X_b(\omega) = \omega(b)$ によって定義される. このとき X_b の分布は $P_p(X_b = 1) = P_p(\omega(b) = 1) = p$ となり, また全体のボンドの状態を表す $\mathbf{X} = \{X_b; b \in \mathbf{B}^2\}$ の分布は P_p となる. つまり $\mathbf{X}(\omega) = \omega$ により分布と確率が同じものとなる. (一種の同一視をしている.)

問 1.2 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とするとき, 以下が成立することを示せ.

(1) $B_n \in \mathcal{F}\ (n \geq 1) \Rightarrow \bigcap B_n \in \mathcal{F}$.

(2) $B_n \in \mathcal{F},\ B_n \uparrow \Rightarrow P\left(\bigcup B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

(3) $B_n \in \mathcal{F},\ B_n \downarrow \Rightarrow P\left(\bigcap B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

(4) $B_n \in \mathcal{F}\ (n \geq 1) \Rightarrow P\left(\bigcup B_n\right) \leq \sum P(B_n)$.

(5) (**Borel-Cantelli の補題**) $B_n \in \mathcal{F}\ (n \geq 1),\ \sum P(B_n) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right) = 0$, i.e., $P\left(\liminf_{n\to\infty} B_n^c\right) = 1$. ここで $\limsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} B_n$, $\liminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N} B_n$.

最後に前節で予告したように $\theta(p) = P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty)$ が p に関して単調増加であることを示す. まず $\theta_n(p) := P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| \geq n)$ とおくと $\theta(p) = \lim_{n\to\infty}\theta_n(p)$ より $\theta_n(p)$ が単調増加であることを示せばよい. 各ボンド $b \in \mathbf{B}^2$ に対し, $Z_b = Z_b(\omega)$ を $[0,1]$ 上の一様乱数で, $\{Z_b\}$ が独立とする. その分布を Q で表すと $Q(Z_b \leq p) = p = P_p(X_b = 1)$ となる. 従って $S(p) = \{b \in \mathbf{B}^2; Z_b \leq p\}$ として, その原点 O を含む連結成分を $C_{\mathrm{O}}(p)$ とすれば, これは明らかに p について単調増加な集合で $\theta_n(p) = P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| \geq n) = Q(\|C_{\mathrm{O}}(p)\| \geq n)$ が成り立つことから $\theta_n(p)$ は単調増加となる.

1.3 $1/3 \leq p_H \leq 2/3$

臨界確率 p_H に対して, 簡単な議論で分かる結果を紹介しよう. そこでは統計力学などで広く使われている **Peierls の論法** を用いる.

定理 1.2 *Hammersley* の臨界確率 $p_H = \inf\{p \in [0,1]; \theta(p) = P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty) > 0\}$ に対し, $1/3 \leq p_H \leq 2/3$ が成り立つ.

まず言葉を一つ定義しておく.

点とボンドを交互に並べた集合 $\gamma = \{x_0, b_1, x_1, b_2, \ldots, b_n, x_n\}$ が**路 (みち, path)** であるとは

$$\text{(i) } b = \{x_{i-1}, x_i\},\ \ \text{(ii) } i \neq j \text{ なら } b_i \neq b_j.$$

但し, ボンドだけを並べて $\gamma = \{b_1, \ldots, b_n\}$ と表すこともある.

定理 1.2 の証明

[$p_H \geq 1/3$ について] $\ {}^\forall p < 1/3, \theta(p) = 0$ を示せばよい.

今, γ を原点を出発する長さ n の路 (みち) とすると

$$P_p(\gamma \subset C_{\mathrm{O}}) = P_p(X_b = 1, {}^\forall b \in \gamma) = p^n.$$

この路 γ の数が $4 \cdot 3^{n-1}$ を超えないことに注意して, 原点から出発する全ての路 γ について加えると

$$\sum_{\gamma;\ \text{原点から出発する路}} P_p(\gamma \subset C_{\mathrm{O}}) \leq 4\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}p^n \ \ (< \infty \quad \text{if } p < 1/3).$$

ここで原点から出発する路に適当に番号を付けて $\{\gamma_k\}$ と表すことにすれば $\|C_{\rm O}\| = \infty$ なら ${}^\forall N \geq 1, {}^\exists k \geq N; \gamma_k \subset C_{\rm O}$ とできるから, $p < 1/3$ なら, 上のことから Borel-Cantelli の補題を用いて

$$\theta(p) = P_p(\|C_{\rm O}\| = \infty) \leq P_p\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{k\geq N}\{\gamma_k \subset C_{\rm O}\}\right) = 0.$$

従って $p_H \geq 1/3$ が成り立つ.

[$p_H \leq 2/3$ について]　${}^\forall p > 2/3, \theta(p) > 0$ を示せばよい.

$\mathbf{Z}^2$ の裏格子 $(\mathbf{Z^2})^* := \{(m+1/2, n+1/2); m, n \in \mathbf{Z}\}$ を用いる. $(\mathbf{Z^2})^*$ のボンド $b^* \in (\mathbf{B}^2)^*$ と $b \in \mathbf{B}^2$ は互いに直交するという関係で 1 対 1 に対応する. そこで $Y_{b^*} := X_b$ とおけば独立な確率変数の系 $\{Y_{b^*}; b^* \in (\mathbf{B}^2)^*\} = \{Y_{b^*}; b \in \mathbf{B}^2\}$ ができる.

$N \geq 1$ に対し, $\overline{V_N} := \{(m,n) \in \mathbf{Z}^2; |m| \vee |n| := \max(|m|, |n|) \leq N\}$ として, その中のボンド全体を V_N とおく. $p > 2/3$ のとき $N = N(p)$ を十分大きくとると $S = \{b \in \mathbf{B}^2; X_b = 1\}$ に対して,

$$P_p(S \text{ は } V_N \text{ から無限に伸びる連結成分をもつ}) \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

を示す. もし $\|C_{\rm O}\| < \infty$ なら $C_{\rm O}$ を取り囲む $(\mathbf{B}^2)^*$ 内の閉じた路 (closed path) γ^* が存在する. そこで原点 O の代わりに V_N を考えると,

$$\begin{aligned} & P_p(S \text{ は } V_N \text{ から無限に伸びる連結成分をもたない}) \\ = \ & P_p(V_N \text{ を囲む } (\mathbf{B}^2)^* \text{ 内の閉じた路 } \gamma^* \text{ が存在する}) \\ \leq \ & \sum_{\gamma^*;\ V_N \text{ を囲む路}} P_p(Y_{b^*} = 0, {}^\forall b^* \in \gamma^*) \end{aligned}$$

今, $\|\gamma^*\| = k$ とすると V_N を囲むことから $k \geq 4(2N+1) = 8N+4$ $(\geq 8N)$ で, 更に γ^* は必ず $[0,k]\times\{0\}$ と交わるから (即ち, $\{(j+1/2, 1/2); 1 \leq j \leq k\}$ のどれかの点を通るから) γ^* の数は, かなり多く見積もっても $k \cdot 4 \cdot 3^{k-1}$ を超えない. 従って

$$P_p(S \text{ は } V_N \text{ から無限に伸びる連結成分をもたない}) \leq \sum_{k\geq 8N} 4k \cdot 3^{k-1}(1-p)^k.$$

$p > 2/3$ なら $N \to \infty$ のとき, 右辺は 0 に収束する ($\to$ 問). よってこのとき $N = N(p)$ を十分大きくとれば (1) が成り立つ. (1) の左辺の集合は $\{X_b; b \notin V_N\}$ だけに依存し, $\{X_b; b \in V_N\}$ とは独立であることに注意して

$$\begin{aligned} & P_p\left(\{X_b = 1, {}^\forall b \in V_N\} \cap \{S \text{ は } V_N \text{ から無限に伸びる連結成分をもつ }\}\right) \\ = \ & P_p(X_b = 1, {}^\forall b \in V_N) P_p(S \text{ は } V_N \text{ から無限に伸びる連結成分をもつ}) \\ \geq \ & \frac{1}{2} P_p(X_b = 1, {}^\forall b \in V_N) = \frac{p^{4N^2}}{2} > 0. \end{aligned}$$

明らかに $P_p(\|C_{\rm O}\| = \infty) \geq$ (左辺) で, これから $p > 2/3$ なら $\theta(p) > 0$, 即ち, $p_H \leq 2/3$ をえる. ■

問 1.3　$[0 \leq {}^\forall p < 1/3, \theta(p) = 0 \Rightarrow p_H \geq 1/3]$ と $[2/3 < {}^\forall p \leq 1, \theta(p) > 0 \Rightarrow p_H \leq 2/3]$ を示せ.

問 1.4　$p > 2/3$ なら $\sum_{k\geq 1} k 3^{k-1}(1-p)^k < \infty$ を示せ.

問 1.5　$\theta(p)$ は右連続であることを示せ.

ヒント　前に考えた Z_b と $S(p) = \{b \in \mathbf{B}^2; Z_b \leq p\}$ を使って, $\theta(p+h) = P\big(S(p+h)$ の原点を含む連結成分は無限$\big)$ と表されて, $h \downarrow 0$ なら $S(p+h) \downarrow S(p)$, i.e., $\bigcap_{h>0} S(p+h) = S(p)$ より (示せ), $\theta(p+h) \downarrow \theta(p)$ $(h \downarrow 0)$ をえる. 別のやり方としては, $\theta_h(p)$ が連続で (p の多項式となるから), $\theta_n(p) \downarrow \theta(p)$ $(n \to \infty)$ からも示せる.

問 1.6　一般に $f_n(x)$ を $[0,1]$ 上の単調増加な連続関数として $f_n \downarrow f$ (各点収束) なら $f(x)$ は $[0,1]$ で右連続であることを示せ.

2 3 種の神器

パーコレーションの解析において重要な役割を果たす **FKG 不等式, BK 不等式, Russo の公式** と呼ばれる 3 つの道具を紹介しよう.

配置空間を $\Xi = \{\xi : \mathbf{B}^2 \to \{0,1\}\}$ とし, **順序** $\le$ を $[\xi \le \eta \iff \xi(b) \le \eta(b)\ ({}^\forall b \in \mathbf{B}^2)]$ で入れる. この順序により単調関数を定義する.

$f : \Xi \to \mathbf{R}$ 可測関数が**単調増加 (単調減少)** であるとは $\xi \le \eta$ なら $f(\xi) \le f(\eta)$ ($f(\xi) \ge f(\eta)$) をみたすときをいう.

更に集合 $A \in \mathcal{B}(\Xi)$ が**単調増加 (単調減少)** であるとはその定義関数 1_A が単調増加 (単調減少) であるときをいう.

問 2.1 $A \in \mathcal{B}(\Xi)$: 単調増加 $\iff$ $[\xi \in A, \xi \le \eta \Rightarrow \eta \in A]$ を示せ. また単調減少のときの条件はどうなるか？

直感的には開いたボンドが多い配置ほど, 大きい関数, または含みやすい集合を単調増加という.

$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2$ に対し, $|x| := x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$ として, $V_N = \{b = \{x, y\} \in \mathbf{B}^2; |x,|, |y| \le N\}$, さらに $\xi \in \Xi$ に対し, $S_N(\xi) = \{b \in V_N; \xi(b) = 1\}$ とおくと, $f(\xi) = \|S_N\|$ は単調増加となる.

また $S(\xi) = \{b \in \mathbf{B}^2; \xi(b) = 1\}$ の原点 O を含む連結成分を $C_{\mathrm{O}}(\xi)$ とおくと, $f(\xi) = \|C_{\mathrm{O}}(\xi)\|$ も単調増加となる.

$A = \{\sum_{i=1}^n \xi(b_i) \ge k\}$ は単調増加, $A = \{\sum_{i=1}^n \xi(b_i) \le k\}$ は単調減少.

2.1 FKG 不等式 [Fortuin, Kesten, Ginibre]

次の不等式は実は **Harris の不等式**, あるいは **Harris-FKG 不等式**というべきもので, '60 年に Harris [3] が次の形で示し, '72 年に Fortuin, Kesten, Ginibre の 3 人が共著の論文 [1] でもっと一般的な, 現在, 統計力学でよく用いられる形に拡張して証明した. それ故, FKG 不等式という方がメジャーとなっている.

定理 2.1 (FKG 不等式) $p \in [0,1]$ とする. Ξ 上の有界な単調増加関数 f, g に対して, 次が成り立つ*:*

$$E_p[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})] \ge E_p[f(\mathbf{X})]E_p[f(\mathbf{X})].$$

この不等式は最後の「臨界確率の値」の章で用いるが, 補章で, もっと一般的な形で述べて示すことにして, ここでは簡単な説明だけにとどめておく. f, g が 1 つのボンドのみに依存する関数のとき, 即ち, $f(\xi) = f(\xi(b))$ のとき (g も同様),

(左辺) $= f(1)g(1)p + f(0)g(0)(1-p)$,

(右辺) $= [f(1)p + f(0)(1-p)][g(1)p + g(0)(1-p)]$ より,

(右辺) $-$ (左辺) $= [f(1) - f(0)][g(1) - g(0)]p(1-p) \ge 0$ をえる (f, g が有限個のボンドに依存するときには $X_{b_1}, \ldots, X_{b_n}$ の独立性と帰納法により証明される).

問 2.2 上の計算を確かめよ.

2.2 BK 不等式 [van den Berg and Kesten]

$A, B \subset \Xi$ を有限個のボンド $\{b_1, \ldots, b_n\}$ で決まる筒集合とする. このとき $A \circ B$ をボンド $\{b_1, \ldots, b_n\}$ において, 共通のオープンボンドをもたない $\xi' \in A$ と $\xi'' \in B$ に対し, それらのオープンボンドを合わせた配置 ξ の集合とする.

定理 2.2 (BK 不等式) A, B が単調増加な筒集合なら, 任意の $p \in [0,1]$ に対して, 次が成り立つ:

$$P_p(\mathbf{X} \in A \circ B) \le P_p(\mathbf{X} \in A) P_p(\mathbf{X} \in B).$$

これも FKG 不等式と同様に, 補章でもう少し一般的な形で述べて, 証明を与える.

ただ証明のアイデアをいい加減に言うと, $(\mathbf{X}, P_p)$ と同じ分布をもつコピーを $(\mathbf{X}', P_p)$ として, その 2 つの直積を考え, 対象をそこへ拡張する. それにより, BK 不等式の各辺が, 同じ 1 つの確率 $\widetilde{P} = P_p \otimes P_p$ (直積確率測度) のもとで, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ のボンドの状態への依存数をパラメータとする両極端の集合を用いて表すことができ, その間を帰納法で結ぶという手法を用いる. 即ち, $\widetilde{A} = A \times \Xi$, $\widetilde{B}_0 = B$ として $= 1, \ldots n$ に対し, $\widetilde{B}_k$ を $[(\xi, \xi') \in \widetilde{B}_k \iff \xi'$ の b_1 から b_k までの状態と ξ の b_{k+1} から b_n までの状態を合わせた配置が B の元となる (他のボンドの状態はどうでも良い)] と定義する, このとき

$$P_p(\mathbf{X} \in A \circ B) = \widetilde{P}((\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}) \in \widetilde{A} \circ \widetilde{B}_0), \quad P_p(\mathbf{X} \in A) P_p(\mathbf{X} \in B) = \widetilde{P}((\mathbf{X}, \mathbf{X}') \in \widetilde{A} \circ \widetilde{B}_n)$$

となるので, $k = 0, 1, \ldots, N$ に対して次を示すという手法を用いる:

$$\widetilde{P}((\mathbf{X}, \mathbf{X}') \in \widetilde{A} \circ \widetilde{B}_k) \le \widetilde{P}((\mathbf{X}, \mathbf{X}') \in \widetilde{A} \circ \widetilde{B}_{k+1}).$$

2.3 Russo の公式

$\xi \in \Xi$ と $A \subset \Xi$ に対して, $b \in \mathbf{B}^2$ が ξ で A に対して **ピボタル (pivotal)** [1] とは ξ と $\delta_b(\xi)$ (ξ の b での状態のみを変えたもの) が A と A^c に分かれるときをいう. b がピボタルであるかどうかは, それ以外のボンドの状態によって決まり, b での状態には依存しない. 即ち, b が open か colosed かとは独立である. さらに次を定義しておく:

$$N(A) = N(A; \xi) = \#\{b \in \mathbf{B}^2; b \text{ は } \xi \text{ で } A \text{ に対して pivotal}\} = \sum_{b \in \mathbf{B}^2} 1_{\{b \text{ は } \xi \text{ で } A \text{ に対して pivotal}\}}.$$

例えば, $A = \{\sum_{i=1}^n \xi(b_i) \ge k\}$ のとき $\sum_{i=2}^n \xi(b_i) = k - 1$ なる ξ で b_1 は A に対し, ピボタルとなる.

定理 2.3 (Russo の公式) A を有限個のボンド $b_1, \ldots, b_n$ で決まる単調増加な筒集合とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\frac{d}{dp} P_p(\mathbf{X} \in A) = E_p[N(A; \mathbf{X})] \quad (p \in [0,1]).$$

特に $P_p(\mathbf{X} \in A)$ は p について単調増加.

[証明] 設定を少し一般化して, 各ボンド b_i の open の確率を $p_i \in [0,1]$ として, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ とおく. このとき確率も $P_{\mathbf{p}}$ として表す. まず $i = 1, \ldots, n$ を 1 つ固定し, p_i のみを p'_i に変えたとき (他はそのままで) $\mathbf{p}'$ と表すことにする. 仮定より

$$P_{\mathbf{p}'}(\mathbf{X} \in A) - P_{\mathbf{p}}(\mathbf{X} \in A) = (p'_i - p_i) P_{\mathbf{p}}(b_i \text{ は } \mathbf{X} \text{ で } A \text{ に対してピボタル})$$

をえる. (事象を b_i がピボタルかどうかで分けると, そうでない確率は $(\mathbf{X} \in A)$ が b_i の状態に依存しないのでキャンセルする. つまり, $\{\mathbf{X} \in A, b_i$ がピボタルでない $\}$ は b_i が open or closed という事象とは独立となり, 先の事象の確率は, p_i に依存しないので消える. また, b_i がピボタルのとき, A が単調増加であるから $(X_{b_i} = 1)$ と $(\mathbf{X} \in A)$ は同値. さらに b_i がピボタルであることは b_i の状態には依存しないので, $(X_{b_i} = 1)$ と独立で, しかもその確率は $P_{\mathbf{p}'}$ と $P_{\mathbf{p}}$ のもとで等しい.) これから, 次をえる.

$$\frac{\partial}{\partial p_i} P_{\mathbf{p}}(\mathbf{X} \in A) = P_{\mathbf{p}}(b_i \text{ は } \mathbf{X} \text{ で } A \text{ に対してピボタル}).$$

[1] pivot; 要, 中心, 旋回軸という意味

従って

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}P_p(\mathbf{X}\in A) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}P_{\mathbf{p}}(\mathbf{X}\in A)\Big|_{\mathbf{p}=(p,\ldots,p)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}P_p(b_i \text{ は } \mathbf{X} \text{ で } A \text{ に対してピボタル})\\ &= E_p[N(A;\mathbf{X})].\end{aligned}$$

■

3 2 つの臨界確率の一意性 $p_H = p_T (=: p_c)$

初めに述べたように 2 つの臨界確率

- Hammersley の臨界確率: $p_H = \inf\{p\in[0,1];\theta(p) := P_p(\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty) > 0\}$,
- Temperley の臨界確率 $p_T = \inf\{p\in[0,1];\chi(p) := E_p[\|C_{\mathrm{O}}\|] = \infty\}$

に対し, $p_H \ge p_T$ は問として述べたが, 実際には, 等しくなることを前節の 3 種の神器 (実際には後の 2 つだけ) を用いて, 示して行きたい とは思うのだが, 講義時間の都合上, 全て詳しい証明は省いて, その流れだけを追って行くことにする. 従って, ここは認めてしまって, 次の「第 4 章 無限クラスター」に跳んでくれても良い. 但し, 前半に出てくる **Mensikov の評価式** は「第 5 章 臨界確率の値」で用いる.

(本当はここはメインといっても良いほどパーコレーション独特のテクニックを用いるのだが, 如何せん, 集中講義ならまだしも週 1 回の講義では話の流れも, 理解も, 跳んでしまうので, お話だけに留めておく. もし全体の講義の終わりの方で時間が余れば, ちゃんとした証明の一部でも紹介できればと思う. どうしても詳しい証明を知りたい方は教科書を自分で読んで貰いたい).

話をボンドから格子点に移すために次を考える: $|\overline{C_{\mathrm{O}}}|$ で C_{O} に含まれる格子点の数を表すことにすると $\{\|C_{\mathrm{O}}\| = \infty\} = \{|\overline{C_{\mathrm{O}}}| = \infty\}$ となる. これから $\theta(p) = P_p(|\overline{C_{\mathrm{O}}}| = \infty)$ で, また $\overline{\chi}(p) := E_p[|\overline{C_{\mathrm{O}}}|]$ とおくと $p_T = \inf\{p\in[0,1];\overline{\chi}(p) = \infty\}$ とも表される ($|\overline{C_{\mathrm{O}}}|/2 \le \|C_{\mathrm{O}}\| \le 4|\overline{C_{\mathrm{O}}}|$ による).

一般にボンドの集合 A に対し, $\overline{A}$ でその中に含まれる格子点の全体を表す.

3.1 $p_H = p_T$: Menshikov の方法

$p_H \le p_T$ を示せばよいが, それには任意の $p < p_H$ に対し, $\overline{\chi}(p) < \infty$ を示せば十分である.

問 3.1 このことを説明せよ. (**ヒント** $\overline{\chi}(p) < \infty$ なら $p \le p_T$)

[証明の概略] 記号の簡単のため, $\mathbf{X}$ と ξ を同一視して考える. $N(A:\mathbf{X}) = N(A:\xi) = N(A)$ と簡単に表すことにする. $x \in C \subset \mathbf{Z}^2$ に対して x を中心とする最大半径を $r_x(C) = \sup\{|y-x|; y\in C\}$ と決め,

$$\pi_n(p) = P_p(A_n) \quad (A_n = \{\xi\in\Xi; r_0(C_{\mathrm{O}}(\xi)) \ge n\})$$

とおくと Russo の公式を用いることによって

$$\frac{d}{dp}\pi_n(p) = E_p[N(A_n)] = \frac{\pi_n(p)}{p}E_p[N(A_n) \mid A_n]$$

をえることができる. 実際, 後半の「=」については, まず A_n が単調増加であるから, ボンド b が A_n に対してピボタルなら, 事象 A_n が起こることと $X_b = 1$ は同値となり. 次が成り立つ:

$$\{\ b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル }\} \cap \{X_b = 1\} = \{\ b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル }\} \cap A_n.$$

更にボンド b が A_n に対してピボタルというのは b 以外のボンドの状態で決まるから, X_b とは独立で,

$$P_p(\text{ } b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル})p = P_p(\{ \text{ } b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル } \} \cap A_n).$$

よって

$$\begin{aligned} E_p[N(A_n)] &= \sum_{b \in V_n} P_p(\text{ } b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル}) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{b \in V_n} P_p(\text{ } b \text{ は } A_n \text{ に対してピボタル} \mid A_n)P_p(A_n) \\ &= \frac{\pi_n(p)}{p} E_p[N(A_n) \mid A_n] \end{aligned}$$

これより $0 < p_1 < p_2 < 1$ に対し, (p_1, p_2) で積分することにより, 次をえる:

$$\pi_n(p_2) = \pi_n(p_1)\exp\left(\int_{p_1}^{p_2} E_p[N(A_n) \mid A_n]\frac{dp}{p}\right). \tag{2}$$

また

$$k_n(p) = \max\left\{k; k \le \frac{1}{\pi_{[n/k]}(p)}\right\}$$

とおくと ($[n/k]$ は n/k の整数部分を表す; $[\cdot]$ はガウス記号), n 十分大なら, $0 < \alpha < \beta < p_H$ に対し,

$$\pi_n(\alpha) \le \pi_n(\beta)\exp\left[-\frac{\beta-\alpha}{4\beta}k_n(\beta)\right] \tag{3}$$

をえる. (これを示すのが大変で, 途中, BK 不等式を用いる.) さらに $n' = n[1/\pi_n(\beta)]$ とおくと

$$\pi_{n'}(\alpha) \le \pi_n(\beta)\exp\left[-\frac{\beta-\alpha}{4\beta}(\pi_n(\beta)^{-1}-1)\right]. \tag{4}$$

この上の 2 式 (**ターボチャージャー**と呼ばれる) を用いることにより, $p < p_H$ ならある定数 $K > 0$ と十分大きな番号 N をとることにより, 任意の $n \ge N$ に対し,

$$\pi_n(p) \le \exp[-Kn^{1/3}] \qquad (\textbf{Mensikov の評価式})$$

が成り立つようにできる. (直感的には $\beta < p_H$ なら $\pi_n(\beta) \to 0$ であるから, もし $\pi_n(\beta) \sim C/n$ ぐらいなら, 上の (4) へ代入して, $\pi_{n^2}(\alpha) \le C' \exp[-Kn]$ という評価がえられる. もっと弱い $\pi_n(\beta) \sim a/\log n$ という評価から出発しても, 式 (4) により, その評価を上げていくことができる. それ故, 式 (4) あるいは (3) はターボチャージャーと呼ばれる.) 従って, $\partial\overline{V_N} = \{x \in \mathbf{Z}^2; |x| = N\}$ とおくと, 今, $p < p_H$ より, $\theta(p) = 0$ に注意して,

$$\overline{\chi}(p) = E_p[|\overline{C_{\mathrm{O}}}|] = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} E_p[1_{\{x \in \overline{C_{\mathrm{O}}}\}}] = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} P_p(x \in \overline{C_{\mathrm{O}}}) = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{x \in \partial\overline{V_N}} P_p(x \in \overline{C_{\mathrm{O}}}) \le \sum_{N=0}^{\infty} 8N\pi_N(p)$$

で, Mensikov の評価式より右辺が有限ということが分かる. 従って $p_H \le p_T$, 結局, $p_H = p_T$ をえる. ■

3.2 $p_H = p_T$: Aizenman-Barsky の方法

これには補章で述べる一般的な形の BK 不等式を必要とする. しかし証明はこちらの方が見通しが良く, 分かり易い (2 つの微分不等式を用いて示す, 解析的なやり方) が, ここでは飛ばす.

4 無限クラスター

ここでは無限のオープンクラスターが存在すれば, 唯一つしかないことを示す.

4.1 エルゴード性

初めに少し, 測度論の復習をしておく.

$\mathcal{C}=$ (筒集合全体) (空集合も含むとしておく), $\mathcal{B}(\Xi)=\sigma(\mathcal{C})$ で確率 P_p は 各 cylinder set

$$A^{i_1,\dots,i_n}_{b_1,\dots,b_n}=\{\omega;\omega(b_1)=i_1,\dots,\omega(b_n)=i_n\}\quad (b_k\in\mathbf{B}^2, i_k=0\text{ or }1)$$

に対し,

$$P_p(A_{b_1,\dots,b_n})=p^{i_1+\cdots+i_n}(1-p)^{(1-i_1)+\cdots+(1-i_n)}$$

とおくと, $\mathcal{B}(\Xi)$ 上に一意的に拡張できるものとして定義した. 今, 筒集合の有限和で表される集合全体を

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}):=\left\{\bigcup_{k=1}^n A_k; A_k\in\mathcal{C}, k=1,\dots,n, n\ge 1\right\}$$

とおくと (これは加法族となり), $\mathcal{B}(\Xi)=\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ で, さらに次をみたす.

定理 4.1 (近似定理) $^\forall B\in\mathcal{B}(\Xi), {}^\forall\epsilon>0, {}^\exists A\in\mathcal{A}(\mathcal{C}); P_p(A\triangle B)<\epsilon$, ここで $A\triangle B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$: **対称差**である.

例えば $\mathcal{A}(\mathcal{C})\ni\{\|C_{\mathrm{O}}\|\ge n\}\uparrow\{\|C_{\mathrm{O}}\|=\infty\}\in\mathcal{B}(\Xi)$.

$x\in\mathbf{Z}^2$ に対し, $\tau_x:\Xi\to\Xi; \tau_x\xi:=\xi(\cdot+x)$ とおき, **平行移動 (translation)** という. また $B\in\mathcal{B}(\Xi)$ に対し, $\tau_xB=\{\tau_x\xi;\xi\in B\}=\{\xi;\tau_{-x}\xi\in B\}$ とおく.

(X,P) を Ξ に値をとる確率変数として, その分布を $\mu=P\circ X^{-1}=P(X\in\cdot)$ とする. $^\forall x\in\mathbf{Z}^2, {}^\forall B\in\mathcal{B}(\Xi), \mu(\tau_xB)=\mu(B)$ をみたすとき, μ あるいは X が**平行移動不変**であるという.

また $^\forall B\in\mathcal{B}(\Xi); \tau_xB=B$ ($^\forall x\in\mathbf{Z}^2$) に対し, $\mu(B)=P(X\in B)=0$ or 1 となるとき, μ あるいは X が平行移動に関して**エルゴード的 (ergodic)** であるという.

命題 4.1. $\mathbf{X}^{(p)}$ またはその分布 P_p は平行移動不変で, しかも平行移動に関してエルゴード的である.

ここで B としては, 次で見るように $\Xi_\infty:=\{^\exists x\in\mathbf{Z}^2; \|C_x\|=\infty\}$ などを考える.

[**証明**] 平行移動不変性は近似定理により, cylinder set に対して示せば十分で, それも P_p の定義の仕方から明らかである.

エルゴード性については, まず $A,B\subset\Xi$ に対し, $\tau_x(A\triangle B)=(\tau_xA)\triangle(\tau_xB)$ が成り立つことを注意しておく. (→ 問) $B\in\mathcal{B}(\Xi); \tau_xB=B$ ($^\forall x\in\mathbf{Z}^2$) に対し, 近似定理より $^\exists A\in\mathcal{A}(\mathcal{C}); P_p(A\triangle B)<\epsilon$. よって $(B\cap B')\triangle(A\cap A')\subset(B\triangle A)\cup(B'\triangle A')$ と上で注意したことから

$$\begin{aligned}P_p(B\triangle(A\cap\tau_xA)) &= P_p((B\cap\tau_xB)\triangle(A\cap\tau_xA))\\ &\le P_p(B\triangle A)+P_p(\tau_x(A\triangle B))\\ &\le 2\epsilon\quad (P_p \text{ の平行移動不変性より}).\end{aligned}$$

よって

$$|P_p(B)-P_p(A\cap\tau_xA)|\le P_p(B\triangle(A\cap\tau_xA))\le 2\epsilon.$$

今, A が有限個のボンドにしか依存しないことから, x を十分大にとれば, A と $\tau_x A$ は独立となり,

$$P_p(A\cap\tau_x A)=P_p(A)P_p(\tau_x A)=P_p(A)^2.$$

よって $|P_p(B)-P_p(A)^2|\le 2\epsilon$. 一方, $|P_p(B)-P_p(A)|\le P_p(B\triangle A)<\epsilon$ から

$$\begin{aligned}|P_p(B)-P_p(B)^2| &\le |P_p(B)-P_p(A)^2|+|P_p(A)^2-P_p(B)^2|\\ &\le 2\epsilon+2\epsilon=4\epsilon.\end{aligned}$$

$\epsilon>0$ 任意より, 結局, $P_p(B)=P_p(B)^2$, i.e., $P_p(B)=0$ or 1 をえる. ■

問 4.1 $A,B\subset\Xi$ に対し, $\tau_x(A\triangle B)=(\tau_x A)\triangle(\tau_x B)$ $(x\in\mathbf{Z}^2)$ が成り立つことを示せ.

4.2　無限クラスターの一意性

次にいくつか記号を用意する. ($S(\xi)$ は配置 Ξ での open bonds の全体であった.)

$$\Xi_\infty:=\{\xi\in\Xi; S(\xi) \text{ に無限クラスターがある }\}=\bigcup_{x\in\mathbf{Z}^2}\{\xi\in\Xi;\|C_x(\xi)\|=\infty\},$$

$$N_\infty=N_\infty(\xi):=\#\{S(\xi) \text{ の無限クラスター }\}.$$

命題 4.2　$\theta(p)>0 \iff P_p(\Xi_\infty)=1.$

[証明]　まず $\tau_x\Xi_\infty=\Xi_\infty$ であるから, P_p のエルゴード性より, $P_p(\Xi_\infty)=0$ or 1 であることに注意する. $\theta(p)>0$ なら, $\Xi_\infty\supset\{\|C_{\mathrm{O}}\|=\infty\}$ より, $P_p(\Xi_\infty)>0$, 即ち, $P_p(\Xi_\infty)=1$ をえる. 逆に $P_p(\Xi_\infty)=1$ とする. もし $\theta(p)=0$ とすると, $^\forall x\in\mathbf{Z}^2,\tau_x C_{\mathrm{O}}=C_x$ より, $P_p(\|C_x\|=\infty)=0$. これから

$$P_p(\Xi_\infty)\le\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}P_p(\|C_x\|=\infty)=0$$

となり, 仮定に矛盾する. ゆえに $\theta(p)>0$. ■

定理 4.2 (Newman-Schulman)　$p\in[0,1]$ に対し, $P_p(N_\infty=k)=1$ なら $k\in\{0,1,\infty\}$.

[証明]　$p=0,1$ なら明らか. $p\in(0,1)$ する. $1\le k<\infty$ に対し, $P_p(N_\infty=k)=1$ として $k=1$ を示す. $\xi\in\{N_\infty=k\}$ に対し, $S(\xi)$ には k 個の無限クラスターが確率 1 である. それを $I_1,\dots,I_k$ とする.

$$\lim_{n\to\infty}P_p(V_n\cap I_j\ne\emptyset,j=1,\dots,k)=P_p(\bigcup_{n=1}^\infty\{V_n\cap I_j\ne\emptyset,j=1,\dots,k\})=1.$$

従って $^\forall\epsilon>0,{}^\exists n_0;P_p(V_{n_0}\cap I_j\ne\emptyset,j=1,\dots,k)>1-\epsilon$. 今, $0<\epsilon<1$ と n_0 を固定し,

$$A=A_{n_0}:=\{\xi\in\Xi;N_\infty(\xi)=k,V_{n_0}\cap I_j\ne\emptyset,j=1,\dots,k\}$$

とおく. この中で V_{n_0} のボンドを全てオープンとしてもその確率が正となることをいう. このとき無限オープンクラスターの数は 1 つとなる. そのために $\Xi_{n_0}=\{0,1\}^{V_{n_0}}\supset A|_{V_{n_0}}\ni\xi|_{V_{n_0}}$ $(\xi\in A)$ として $\varphi\in A|_{V_{n_0}}$ に対し,

$$A(\varphi):=\{\xi\in A;\xi=\varphi \text{ on } V_{n_0}\}\quad\text{とおくと}\quad A=\bigcup_{\varphi\in A|_{V_{n_0}}}A(\varphi)\quad(\text{素和}).$$

今, $\xi\in\Xi,\varphi\in A|_{V_{n_0}}$ に対し, $\xi^\varphi\in\Xi$ を $\xi^\varphi=\varphi$ on V_{n_0}, $=\xi$ on $V_{n_0}^c$ と定義すると,

$$A(\varphi)=\{\xi\in\Xi;\xi=\varphi \text{ on } V_{n_0}\}\cap\{\xi\in\Xi;\xi^\varphi\in A\}$$

と表せて, $\{\xi^{\varphi} \in A\}$ は V_{n_0} の外の状態で決まるから, 右辺の 2 つの事象は独立である. $\varphi \in A|_{V_{n_0}}$ の個数は $2^{\|V_{n_0}\|}$ 以下で有限なので, $\alpha(p) := p \vee (1-p)$ を用いて,

$$\begin{aligned}1-\epsilon &< P_p(A) = \sum_{\varphi \in A|_{V_{n_0}}} P_p(\{\xi = \varphi \text{ on } V_{n_0}\} \cap \{\xi^{\varphi} \in A\}) \\ &= \sum_{\varphi \in A|_{V_{n_0}}} P_p(\xi = \varphi \text{ on } V_{n_0}) P_p(\xi^{\varphi} \in A) \\ &\leq 2^{\|V_{n_0}\|} \alpha(p)^{\|V_{n_0}\|} \max\{P_p(\xi^{\varphi} \in A); \varphi \in A|_{V_{n_0}}\}.\end{aligned}$$

上の最大値を与える φ を φ^* とすると,

$$P_p(\xi^{\varphi^*} \in A) \geq (2\alpha(p))^{-\|V_{n_0}\|}(1-\epsilon)$$

をえる. 更に $\{\xi = 1 \text{ on } V_{n_0}\} \cap \{\xi^{\varphi^*} \in A\} \subset \{N_\infty = 1\}$ と独立性から

$$P_p(N_\infty = 1) \geq P_p(\xi = 1 \text{ on } V_{n_0}) P_p(\xi^{\varphi^*} \in A) \geq \left(\frac{p}{2\alpha(p)}\right)^{\|V_{n_0}\|}(1-\epsilon) > 0$$

となり, $\{N_\infty = 1\}$ は平行移動不変であるから, エルゴード性より, 結局, $P_p(N_\infty = 1) = 1$ をえる. ■

定理 4.3 (Burton-Keane) $P_p(N_\infty = \infty) = 0$, *i.e.*, 無限クラスターは存在すれば唯一つ.

これの証明はそう難しくはないが, それでも時間を要するのでここでは省略し, 最後の §6 にまわす. しかし, 直感的には無限の長さのオープンクラスターが無限個ある確率がたとえ正になる可能性はあるとしても, 1 になるとは思えないであろう. しかも実際には, エルゴード性から 0 か 1 しかなりえないのだから, やはり 0 とならざるおえないのである.

ちなみに証明には**多パラメータエルゴード定理**を用いる方法と P_p の**混合性**から**チェビシェフの不等式**を用いて示す方法とがある. 前者の定理を知っていれば割と簡単で, しかし知らない人には後者の方が分かり易いが, 少し長くなる.

5 臨界確率の値

5.1 Kesten の結果: $p_c = 1/2$ の証明

$p_c \geq 1/2$, $p_c \leq 1/2$ の順で背理法を用いて示す. その際, **duality** という概念を用いる (実は以前, 用いている). 即ち, $(\mathbf{Z}^2)^*$ で $\mathbf{Z}^2$ を各成分, 正の方へ $+1/2$ だけずらした**裏格子**を表し, $(\mathbf{B}^2)^*$ でそのボンドの全体を表す. $b \in \mathbf{B}^2$ に対し, それと直交するボンド $b^* \in (\mathbf{B})^*$ がただ一つだけ決まる. このとき $Y_{b^*} = X_b$ で裏格子上の確率変数 $\mathbf{Y} = \{Y_{b^*}\}$ を定義する. $\mathbf{B}^2$ では open bond $(b; X_b = 1)$ を見るのに対し, $(\mathbf{B}^2)^*$ では closed bond $(b^*; Y_{b^*} = 0)$ に注目する. このとき「duality を用いる」という言い方をする.

補題 5.1 (Harris).

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad i.e., \quad p_c \geq \frac{1}{2}.$$

即ち, 無限のオープンクラスターは $p = 1/2$ では存在しない.

[証明] $\theta(1/2) > 0$ と仮定する.

$$S = \{b \in \mathbf{B}^2; X_b = 1\}, \quad S^* = \{b^* \in (\mathbf{B}^2); Y_{b^*} = 0\}$$

とおく. 上の仮定と各ボンドの open-closed の確率が 1/2 であることとエルゴード性より

$$P_{1/2}(S, S^* \text{ ともに無限クラスターをもつ}) = 1.$$

$(0 < P_{1/2}(\|C_{\rm O}\| = \infty) \le P_{1/2}({}^\exists x \in \mathbf{Z}^2; \|C_x\| = \infty) = P_{1/2}({}^\exists x^* \in (\mathbf{Z}^2)^*; \|C_{x^*}\| = \infty)$ で, エルゴード性から $= 1$ となるから.)

今, 番号 n に対して $\partial\overline{V_n} = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| = n\}$ とおき, 任意の $0 < \epsilon < 1/4$ に対して, 十分大きな番号 n をとると確率の上方連続性より, ($n \to \infty$ のとき, 次の確率 $\uparrow 1$ なので)

$$P_{1/2}\left(S, S^* \text{ のそれぞれの無限クラスターは } \partial\overline{V_n} \text{ と交わっている}\right) > 1 - \epsilon^4.$$

そこで, $A_n^+(r)$ (or $A_n^+(l), A_n^+(u), A_n^+(d)$) を $\partial\overline{V_n}$ の右辺（or 左辺, 上辺, 下辺）から $S \setminus V_n$ の無限クラスターが伸びている集合と定義する. 上の事象はこれらの和を用いて表せて, さらにその補集合（単調減少）に対して FKG 不等式を用いることにより

$$P_{1/2}(A_n^+(r)) = P_{1/2}(A_n^+(l)) = P_{1/2}(A_n^+(u)) = P_{1/2}(A_n^+(d)) > 1 - \epsilon$$

が示せる. 実際, $i = r, l, u, d$ に対し, $P_{1/2}(A_n^+(i))$ が全て等しいことは回転不変性より明らかで, 更に FKG 不等式から (単調減少の事象が偶数個なので), $P_{1/2}(A_n^+(i)^c)^4 \le P_{1/2}(A_n^+(r)^c \cap A_n^+(l)^c \cap A_n^+(u)^c \cap A_n^+(d)^c) < \epsilon^4$ をえる (最後の不等式は上の結果から). 同様に S^* において V_n を $1/2$ ずつ縮めた正方形

$$U_n^* = \{b^* = \{u^*, v^*\} \in (\mathbf{B}^*); -n \le u^*, v^* \le n - 1\}$$

で置き換えて（$\partial\overline{V_n}$ はそのままで）$A_n^-(r), A_n^-(l), A_n^-(u), A_n^-(d)$ を定義すると上と同じことが成り立つ. (厳密には, 先にこれを満たす十分大きな n を取ってから, 上をやる.) これらのことから

$$P_{1/2}\left(A_n^+(r) \cap A_n^+(l) \cap A_n^-(u) \cap A_n^-(d)\right) > 1 - 4\epsilon$$

をえる. 無限クラスターの一意性から, これは $\partial\overline{V_n}$ の左右を S の開クラスターが, 上下を S^* の閉クラスターが通っている確率を表すがそれは定義の仕方から明らかに起こりえない. よって, 矛盾である. 従って, $\theta(1/2) = 0$ でなくてはならない. ■

補題 5.2. $p_c \le \dfrac{1}{2}$.

[証明]

$$T(n) = [0, n+1] \times [0, n] \cap \mathbf{B}^2, \quad S(n) = \left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \cap (\mathbf{B}^2)^*$$

とおくと確率 $1/2$ の対称性と回転不変性から

$$\begin{aligned} a_n &= P_{1/2}(T(n) \text{ の左辺と右辺を結ぶ open path が } T(n) \text{ 内にある}) \\ &= P_{1/2}(S(n) \text{ の上辺と下辺を結ぶ closed path が } S(n) \text{ 内にある}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が分かる. 今, もし $p_c > 1/2$ とすると, Menshikov の評価式 [$p < p_c$ なら $\exists K > 0$, $N \in \mathbf{N}$; $\pi_n(p) \equiv P_p(\mathrm{O} \sim \partial\overline{V_n}) \le \exp[-Kn^{1/3}]$ $(\forall n \ge N)$] より, ある定数 $M > 0$ が存在して,

$$\pi_n(1/2) \le M \exp[-Kn^{1/3}].$$

($A \sim B$ は A から B までが開いたボンドで結ばれることを表す.) よって

$$P_{1/2}(x \sim y) \le M \exp[-K|y - x|^{1/3}].$$

これより

$$a_n \le \sum_{x \in (T(n) \text{ の左辺})} \sum_{y \in (T(n) \text{ の右辺})} P_{1/2}(x \sim y) \le M(n+1)^2 \exp[-K(n+1)^{1/3}] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となり $a_n = 1/2$ に矛盾. ■

6 追加証明

6.1 無限クラスターの一意性

[定理 4.3 $P_p(N_\infty = \infty) = 0$, i.e., 無限クラスターは存在すれば唯一つ] の証明.

$\xi \in \{N_\infty = \infty\}, x \in \mathbf{Z}^2$ に対し, x を含むボンドを除くと $C_x(\xi)$ が 3 つの無限クラスターに分かれるとき, x を (ξ の) **遭遇点 (encounter point)** ということにする. 今, 仮に $P_p(N_\infty = \infty) = 1$ であったとして, 矛盾を導こう (これから $P_p(N_\infty = \infty) < 1$ となるが, エルゴード性から $= 0$ でなければならない). まず P_p(原点は遭遇点) > 0 を示す. 前の定理 4.2 の証明と同様に考えれば十分大きい n を一つ固定して,

$$P_p\begin{pmatrix} S(\xi)\setminus V_n \text{ で } \partial\overline{V}_n \text{ から出発し, 互いにボンドを} \\ \text{共有しない無限クラスターが 3 つ以上存在} \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2}.$$

(上の事象を B とするとこれは V_n のボンドの状態のみによって決まる事象と独立であることに注意.) 今, $H = \{x_1, x_2, x_3\}$ ($\partial\overline{V}_n$ の異なる 3 点の組) として $B(H) := \{\xi \in B;$ 各 $x_i \in H$ から V_n の外で異なる無限クラスターが伸びている $\}$ とおくと $\bigcup_{H\subset\partial\overline{V}_n} B(H) = B$. 今, V_n の中で H の 3 点と原点だけが開いた路で結ばれる事象 $A(H)$ を考える. これは $B(H)$ とは独立で, [原点は遭遇点] $= \bigcup_{H\subset\partial\overline{V}_n}(A(H)\cap B(H))$ (素和) となる. 従って, $\beta(p) := p \wedge (1-p)$ に対し, $P(A(H)) \geq \beta(p)^{\|V_n\|}$ より,

$$P_p(\text{原点は遭遇点}) \geq \sum_{H\subset\partial\overline{V}_n} \beta(p)^{\|V_n\|} P_p(B(H)) \geq \beta(p)^{\|V_n\|}\cdot\frac{1}{2} > 0.$$

そこで $\lambda := P_p$(原点は遭遇点) > 0 とおくと

$$\lim_{n\to\infty} P_p(\overline{V}_n \text{ 内には } (\lambda/2)|\overline{V}_n| \text{ 個以上の遭遇点が存在}) = 1 \tag{5}$$

が示せる (後証). ところが, 今, $\overline{V}_n$ 内の遭遇点が k 個あったとすると, $\overline{V}_n$ の外でボンドを共有しない $S(\xi)\setminus\overline{V}_n$ の無限クラスターは $k+2$ 個以上, $\partial\overline{V}_n$ から伸びていないといけない. このことから

$$P_p(\overline{V}_n \text{ 内の遭遇点の個数} \leq |\partial\overline{V}_n| - 2) = 1$$

となり, n 十分大なら, $(\lambda/2)|\overline{V}_n| \geq |\partial\overline{V}_n|$ であるから, 上のことに矛盾する. ゆえに $P_p(N_\infty = \infty) = 0$. ■

[上の証明の中の (5) について]

$A = \{$ 原点は遭遇点 $\}$, $\epsilon = \lambda/2$ ($\lambda = P_p(A)$) として,

$$\lim_{n\to\infty} P_p\left(\left|\frac{1}{|\overline{V}_n|}\sum_{x\in\overline{V}_n} 1_A(\tau_x\xi) - P_p(A)\right| > \epsilon\right) = 0 \tag{6}$$

を示せばよい ([$1_A(\tau_x\xi) = 1 \iff x$ は ξ の遭遇点] に注意). これを示すのに「**多パラメータのエルゴード定理**」を用いる方法があるが, 少し面倒なので, ここでは混合性を用いた証明を与える. まず次を示す:

(P_p の混合性) $A, B \in \mathcal{B}(\Xi)$ に対し, $\lim_{|x|\to\infty} P_p(A\cap(\tau_x B)) = P_p(A)P_p(B)$.

[証] 簡単のため, $P_p = P$ と表す. A, B が有限個のボンドにしか依存しないとき ($A, B \in \mathcal{C}$ のとき) は $|x|$ 十分大なら A と $\tau_x B$ はそれぞれ異なるボンドに依存することになり, 独立性から求める式が成り立つのは明らかである. A, B が一般のとき, 近似定理より, ${}^\forall\epsilon > 0, {}^\exists A', B' \in \mathcal{C}; P(A\triangle A') < \epsilon, P(B\triangle B') < \epsilon$. P の平行移動不変性から

$$P((A\cap\tau_x B)\triangle(A'\cap\tau_x B')) \leq P(A\triangle A') + P((\tau_x B)\triangle(\tau_x B')) < 2\epsilon.$$

よって $^\forall x \in \mathbf{Z}^2$ に対して $|P(A\cap\tau_x B)-P(A'\cap\tau_x B')| < 2\epsilon$. 後は上と同様に $|x|$ 十分大なら $P(A'\cap\tau_x B') = P(A')P(\tau_x B')$ から

$$\limsup_{|x|\to\infty} |P_p(A\cap(\tau_x B)) - P_p(A)P_p(B)| < 4\epsilon \tag{7}$$

が成り立ち, $\epsilon > 0$ 任意より, 求める結果を得る. ■

問 6.1　上の証明の中の式 (7) を示せ.

さてこの P_p の混合性を用いて式 (5) を示すのだが, そのために Chebyshev の不等式を用いる.

[Chebyshev の不等式] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X に対し, $^\forall\epsilon > 0$, $P(|X| > \epsilon) \le E[|X|^2]/\epsilon^2$.

問 6.2　上の不等式を証明せよ.　(**ヒント**　$E[|X|^2; |X| > \epsilon] = E[|X|^2 1_{\{|X|>\epsilon\}}]$ を下から評価)

混合性から (6) を示そう. 混合性において $A = B = \{$ 原点は遭遇点 $\}$ とすると $^\forall\epsilon > 0, {}^\exists L > 0; |^\forall x| \ge L, |P_p(A\cap(\tau_x A)) - P_p(A)^2| < \epsilon$. また

$$\begin{aligned} E_p\left[\left|\frac{1}{|\overline{V}_n|}\sum_{x\in\overline{V}_n} 1_A(\tau_x\xi) - P_p(A)\right|^2\right] &= \frac{1}{|\overline{V}_n|^2}\sum_{x,y\in\overline{V}_n} E_p\left[(1_A(\tau_x\xi) - P_p(A))(1_A(\tau_y\xi) - P_p(A))\right] \\ &= \frac{1}{|\overline{V}_n|^2}\sum_{x,y\in\overline{V}_n}\left[P_p((\tau_{-x}A)\cap(\tau_{-y}A)) - P_p(A)^2)\right] \end{aligned}$$

P_p の平行移動不変性から

$$P_p((\tau_{-x}A)\cap(\tau_{-y}A)) = P_p(A\cap(\tau_{x-y}A))$$

で, 各 $x \in \overline{V}_n$ に対し, $y \in \overline{V}_n$ の和を $|y-x| < L$ と $|y-x| \ge L$ に分けて,

$$\sum_{y\in\overline{V}_n}\left[P_p(A\cap(\tau_{x-y}A)) - P_p(A)^2\right] \le \sum_{y\in\overline{V}_n;|x-y|<L}\left[P_p(A\cap(\tau_{x-y}A)) - P_p(A)^2\right] + \epsilon|\overline{V}_n|.$$

これを $x \in \overline{V}_n$ について加えて, $|\overline{V}_n|^2$ で割ると (x 固定毎に $|y-x| \le L$ なる y は高々 $(2L-1)^2$ 個より)

$$\frac{1}{|\overline{V}_n|^2}\sum_{x,y\in\overline{V}_n}\left[P_p((\tau_x A)\cap(\tau_y A)) - P_p(A)^2\right] \le \frac{4L^2}{|\overline{V}_n|} + \epsilon.$$

$n \to \infty$ として

$$\limsup_{n\to\infty} E_p\left[\left|\frac{1}{|\overline{V}_n|}\sum_{x\in\overline{V}_n} 1_A(\tau_x\xi) - P_p(A)\right|^2\right] \le \epsilon.$$

よって $\epsilon \downarrow 0$ として

$$\lim_{n\to\infty} E_p\left[\left|\frac{1}{|\overline{V}_n|}\sum_{x\in\overline{V}_n} 1_A(\tau_x\xi) - P_p(A)\right|^2\right] = 0.$$

これから Chebyshev の不等式を用いれば (6) をえる. ■

6.2 $p_H = p_T$: Menshikov の方法

$p_H \geq p_T$ を示せばよいが, それには任意の $p < p_H$ に対し, $\overline{\chi}(p) < \infty$ を示せば十分である.

[証明の詳細] $0 < \alpha < \beta < p_H$ とする.

[式 (3) $\pi_n(\alpha) \leq \pi_n(\beta) \exp\left[-\dfrac{\beta-\alpha}{4\beta} k_n(\beta)\right]$ $(n \gg 1)$ **について]**

ここは大変なのでいくつかの補題に分けて証明する. $A_n = \{\mathrm{O} \sim \partial \overline{V}_n\}$ であった.

$\xi \in A_n$ に対し, 原点 O から $\partial \overline{V}_n$ まで届く開いたボンドの路がある. それを一つ決め, $N(A_n;\xi) = k\ (\leq n)$ のときを考える. このとき $b_1, \ldots, b_k$ を A_n に対するピボタルなボンドで, 原点 O から V_n まで, 順に番号を付けたものとする. このときこれらがつながってなければ, ピボタルなボンドまでの間には 2 つ以上の開いた路があることを注意しておく.

ρ_1 を原点 O から b_1 までの距離とし, $2 \leq i \leq k$ に対し, ρ_i を b_{i-1} から b_i までの距離とする. 次の基本となる補題が成り立つ:

補題 6.1 $^\forall r_1, \ldots, r_k \geq 0; r_1 + \cdots + r_k \leq n - k$ に対し,

$$\begin{aligned}
&P_p(\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1}, \rho_k \leq r_k \mid A_n) \\
&\qquad \geq (1 - \pi_{r_k+1}(p)) P_p(\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1} \mid A_n).
\end{aligned}$$

但し, ρ_k まで書いたときは, 条件 $N(A_n) \geq k$ が隠れているものとする.

[証明] b_{k-1} の $\partial \overline{V}_n$ 側の端点を y_{k-1} とし, また b_{k-1} の手前までのオープンクラスターの連結成分を G_{k-1} と表す. このとき独立性と BK 不等式を用いると

$$\begin{aligned}
&P_p\left(\{\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1}\} \cap A_n\right) - P_p\left(\{\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1}, \rho_k \leq r_k\} \cap A_n\right) \\
&\leq P_p\left(\{y_{k-1} \sim \partial \overline{V}_n\} \text{ と } \{y_{k-1} \sim y_{k-1} + \partial \overline{V}_{r_k+1}\} \text{ が } G_k \text{ の外でボンドを共有せずに起こる}\right) \\
&= \sum_{(G,y)} P_p(G_{k-1} = G, y_{k-1} = y) P_p\left(\{y \sim \partial \overline{V}_n \text{ outside } G\} \circ \{y \sim y + \partial \overline{V}_{r_k+1} \text{ outside } G\}\right) \\
&\leq \sum_{(G,y)} P_p(G_{k-1} = G, y_{k-1} = y) P_p\left(y \sim \partial \overline{V}_n \text{ outside } G\right) P_p\left(y \sim y + \partial \overline{V}_{r_k+1} \text{ outside } G\right) \\
&\leq \sum_{(G,y)} P_p\left(\{G_{k-1} = G, y_{k-1} = y\} \cap \{y \sim \partial \overline{V}_n \text{ outside } G\}\right) \pi_{r_k+1}(p) \\
&= P_p\left(\{\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1}\} \cap A_n\right) \pi_{r_k+1}(p).
\end{aligned}$$

これより求める式をえる. ■

更にこれを用いて, 次をえる:

補題 6.2 $1 \leq k \leq n,\ 0 \leq p \leq 1$ のとき $E_p[N(A_n) \mid A_n] \geq k(1 - \pi_{[n/k]}(p))^k$.

[証明] 次の 2 行目の式で $\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$ を 0 から $[n/k] - 1$ までの和に分けて, 上の補題を用いると,

$$\begin{aligned}
E_p[N(A_n) \mid A_n] &\geq kP_p(N(A_n) \geq k \mid A_n) \\
&\geq kP_p\left(\rho_1 \leq \left[\frac{n}{k}\right] - 1, \ldots, \rho_k \leq \left[\frac{n}{k}\right] - 1 \mid A_n\right) \\
&\geq k(1 - \pi_{[n/k]}(p)) P_p\left(\rho_1 \leq \left[\frac{n}{k}\right] - 1, \ldots, \rho_{k-1} \leq \left[\frac{n}{k}\right] - 1 \mid A_n\right) \\
&\geq k(1 - \pi_{[n/k]}(p))^k.
\end{aligned}$$

■

従って, $k = k_n(p) := \max\left\{k; k \le 1/\pi_{[n/k]}(p)\right\}$ に対し, $\pi_{[n/k]}(p) \le 1/k$ より, もし $k \ge 2$ なら ($n \gg 1$ であれば次の補題からいえる), $(1-1/k)^k \ge 1/4$ ($k \ge 2$ について単調より) に注意して,

$$E_p[N(A_n) \mid A_n] \ge k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \ge \frac{k}{4}.$$

これを式 (2) $\pi_n(\beta) = \pi_n(\alpha)\exp\left(\int_\alpha^\beta E_p[N(A_n) \mid A_n]\frac{dp}{p}\right)$ に代入して, n 十分大なら, $0 < \alpha < \beta < p_H$ に対し, 式 (3) $\pi_n(\alpha) \le \pi_n(\beta)\exp\left[-\frac{\beta-\alpha}{4\beta}k_n(\beta)\right]$ をえる.

ここで $k_n(p)$ の性質を述べておく.

補題 6.3 $k_n(p)$ は $\uparrow$ in n, $\downarrow$ in p で, 特に $p < p_H$ なら $\lim_{n\to\infty} k_n(p) = \infty$.

[証明] 単調性は $\pi_{[n/k]}(p)$ の n, p についての単調性から明らか. 後半も $k_n(p)$ の定義から, $k_n(p) + 1 > 1/\pi_{[n/(k_n(p)+1)]}(p)$ で, $p < p_H$ のとき, $\pi_m(p) \to 0$ ($m \to \infty$) であるから, もし $k_n(p)$ が有界とすると明らかに矛盾する. ■

[式 (4) $\pi_{n'}(\alpha) \le \pi_n(\beta)\exp\left[-\frac{\beta-\alpha}{4\beta}(\pi_n(\beta)^{-1}-1)\right]$ ($n' = n[1/\pi_n(\beta)]$) について]

式 (3) で n を n' ($\ge n$) に変えれば $\pi_{n'}(\beta) \le \pi_n(\beta)$ だから, $k_{n'}(\beta) \ge (\pi_n(\beta)^{-1} - 1)$ を示せば十分. $k = [\pi_n(\beta)^{-1}]$ とおくと, $n' = kn$ で, $\pi_{[n'/k]}(\beta) = \pi_n(\beta)$. よって $k = [\pi_{[n'/k]}(\beta)^{-1}] \le \pi_{[n'/k]}(\beta)^{-1}$. $k_{n'}(\beta)$ はこれをみたす最大の k であったから, $k_{n'}(\beta) \ge k = [\pi_n(\beta)^{-1}] \ge \pi_n(\beta)^{-1} - 1$. ■

[式 (4) から Mensikov の評価式がえられることについて] これは前に本文で述べた直感的な解釈のみに留めておく. それほど難しくはないが, やはり長い.

7 補章 一般的な FKG 不等式, BK 不等式

まず FKG 不等式を述べる.

$n \ge 1$ に対し, $I = \{1, \ldots, n\}$, $\Xi = \{0,1\}^I$ とする. このとき $\mathcal{B}(\Xi) = 2^\Xi$ (Ξ の全部分集合族) となる. Ξ 上の関数 f が単調増加とは $[\xi \le \eta \Rightarrow f(\xi) \le f(\eta)]$ をみたすときをいう.

定理 7.1 (FKG 不等式) μ を $(\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$ 上の確率測度で, $\mu(\xi) := \mu(\{\xi\}) > 0$ ($\xi \in \Xi$) と

$$\mu(\xi)\mu(\eta) \le \mu(\xi \vee \eta)\mu(\xi \wedge \eta) \quad (\xi, \eta \in \Xi) \tag{8}$$

をみたすとする. このとき Ξ 上の単調増加な関数 f, g に対し, 次が成り立つ:

$$E_\mu[fg] \ge E_\mu[f]E_\mu[g].$$

証明 $I_n = I = \{1, \ldots, n\}$ の個数 $n \ge 1$ に関する帰納法で示す. $\Xi_n = \{0,1\}^{I_n}$ とする.

$n = 1$ のとき, i.e., $\Xi = \{\xi = \xi(1) = 0.1\} = \{0, 1\}$ と同一視できる.

(左辺) $= f(1)g(1)\mu(1) + f(0)g(0)\mu(0)$,

(右辺) $= [f(1)\mu(1) + f(0)\mu(0)][g(1)\mu(1) + g(0)\mu(0)]$

より, $\mu(1) + \mu(0) = 1$, $\mu(1), \mu(1) \ge 0$, f, g 単調増加であることを用いて, (右辺) $-$ (左辺) $= [f(1) - f(0)][g(1) - g(0)]\mu(1)\mu(0) \ge 0$ をえる

n のとき主張が成り立つとして, $n+1$ でも成り立つことを示す. それには $\xi(n+1)$ による条件付確率を考えればよい.

$\epsilon = 0, 1$ として, $\xi \in \Xi_n$ に対し, $\xi^\epsilon \in \Xi_{n+1}$ を $\xi^\epsilon(j) = \xi(j)$ $(1 \le j \le n)$, $= \epsilon$ $(j = n+1)$ とおく. 今, μ の代わりに $\mu(\xi \mid \epsilon) = \mu(\eta^\epsilon) \sum_{\xi \in \Xi_n} \mu(\xi^\epsilon)$ を考えると, Ξ_n 上で $\xi, \eta \in \Xi$ に対し, (8) をみたす ($\to$ 確かめよ);

$$\mu(\xi \mid \epsilon)\mu(\eta \mid \epsilon) \le \mu(\xi \vee \eta \mid \epsilon)\mu(\xi \wedge \eta \mid \epsilon).$$

そこで $F, G : \Xi_n \to \mathbf{R}$ を $F(\xi) = f(\xi^\epsilon)$, $G(\xi) = g(\xi^\epsilon)$ とおくと, F, G は Ξ 上で単調増加で, 帰納法の仮定より, $\epsilon = 0, 1$ に対して,

$$\sum_{\xi \in \Xi_n} F(\xi)G(\xi)\mu(\xi \mid \epsilon) \ge \sum_{\xi \in \Xi_n} F(\xi)\mu(\xi \mid \epsilon) \sum_{\xi, \eta \in \Xi_n} G(\eta)\mu(\eta \mid \epsilon)$$

つまり

$$\sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^\epsilon)g(\xi^\epsilon)\mu(\xi^\epsilon) \ge \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^\epsilon)\mu(\xi \mid \epsilon) \sum_{\xi \in \Xi_n} g(\eta^\epsilon)\mu(\eta \mid \epsilon) \left(\sum_{\xi \in \Xi_n} \mu(\xi^\epsilon) \right).$$

両辺を $\epsilon = 0, 1$ について和をとり,

$$\sum_{\epsilon=0}^{1} \sum_{\xi \in \Xi_n} H(\xi^\epsilon) = \sum_{\xi \in \Xi_{n+1}} H(\xi)$$

であることに注意して

$$\widehat{f}(\epsilon) := \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^\epsilon)\mu(\xi \mid \epsilon), \quad \widehat{\mu} := \sum_{\xi \in \Xi_n} \mu(\xi^\epsilon)$$

を用いると

$$\sum_{\xi \in \Xi_{n+1}} f(\xi)g(\xi)\mu(\xi) \ge \sum_{\epsilon=0}^{1} \widehat{f}(\epsilon)\widehat{g}(\epsilon)\widehat{\mu}(\epsilon)$$

となり, 更に $\widehat{f}, \widehat{g}, \widehat{\mu}$ が条件をみたすことがいえるので (最後に示す), 右辺に $n = 1$ の場合を適用して

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \Xi_{n+1}} f(\xi)g(\xi)\mu(\xi) &\ge \sum_{\epsilon=0}^{1} \widehat{f}(\epsilon)\widehat{\mu}(\epsilon) \sum_{\delta=0}^{1} \widehat{g}(\delta)\widehat{\mu}(\delta) \\ &= \sum_{\xi \in \Xi_{n+1}} f(\xi)\mu(\xi) \sum_{\eta \in \Xi_{n+1}} g(\eta)\mu(\eta) \end{aligned}$$

をえる. 従って $n+1$ のときも成り立つ.

最後に $\widehat{f}, \widehat{g}, \widehat{\mu}$ が条件をみたすことについて.

$\widehat{\mu}$ は明らかに条件をみたす. $\widehat{f}$ が単調増加であることを示せばよい. そのためにまず, $\phi(\xi) := \mu(\xi \mid 1)/\mu(\xi \mid 0)$ が Ξ_n 上単調増加を示す. $\xi \ge \eta$ とする.

$$\begin{aligned} [\phi(\xi) - \phi(\eta)]\mu(\xi \mid 0)\mu(\eta \mid 0) &= \mu(\xi \mid 1)\mu(\eta \mid 0) - \mu(\xi \mid 0)\mu(\eta \mid 1) \\ &= [\mu(\xi^1)\mu(\eta^0) - \mu(\xi^0)\mu(\eta^1)]/[\widehat{\mu}(1)\widehat{\mu}(0)]. \end{aligned}$$

$\xi^0 \vee \eta^1 = \xi^1, \xi^0 \wedge \eta^1 = \eta^0$ より, μ の条件 (8) を用いて, (右辺)≥ 0 をえる. よって, ϕ は単調増加. 次に f の単調性より,

$$\widehat{f}(1) = \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^1)\mu(\xi \mid 1) \ge \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^0)\mu(\xi \mid 1) = \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^0)\phi(\xi)\mu(\xi \mid 0).$$

ここで $f(\xi^0)$ は $\xi \in \Xi_n$ について単調増加で $\mu(\cdot \mid 0)$ は Ξ_n 上 (8) をみたしているので, ϕ の単調性と帰納法の仮定より,

$$\widehat{f}(1) \ge \sum_{\xi \in \Xi_n} f(\xi^0)\mu(\xi \mid 0) \sum_{\eta \in \Xi_n} \phi(\eta)\mu(\eta \mid 0) = \widehat{f}(0) \cdot 1 = \widehat{f}(0).$$

従って $\widehat{f}$ は単調増加. ■

さてこれから本文の FKG 不等式 (2.1) が導かれることについて述べよう.

まず f,g が有限個のボンド $\{b_1,\dots,b_n\}$ にしか依存しないとき, $\xi\in\Xi=\{0,1\}^I$ に対し, $\mu(\xi)=P_p(X_{b_1}=\xi(1),\dots,X_{b_n}=\xi(n))$ とおくと, 条件 (8) をみたすことは容易に分かる (→ 問). 従って, このときは成り立つ. f,g が一般の有界関数ときは, このような有限個のボンドにしか依存しない関数 f_n,g_n で次のように近似できる:

$$E_p[|f-f_n|^2+|g-g_n|^2]\to 0\quad(n\to\infty).$$

(実際, $f_n=f1_{V_n}$ とおけば Lebesgue の収束定理より分かる.) これから Schwartz の不等式により,

$$E_p[|fg-f_ng_n|]^2\le E_p[|f-f_n|^2]E_p[|g-g_n|^2]\to 0\quad(n\to\infty)$$

となり, 成り立つことが分かる.

問 7.1　上の μ が条件 (8) をみたすことを確かめよ.

問 7.2　f が有界可測関数のとき, $f_n=f1_{V_n}$ とおけば Lebesgue の収束定理より $E_p[|f-f_n|^2]\to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立つことを説明せよ.

次に BK 不等式を述べる.

$I=\{1,\dots,n\}$ として $\Xi=\{0,1\}^I$ とする. $A\subset\Xi$ が単調増加とは $\xi\in A,\xi\le\eta$ なら $\eta\in A$ をみたすときをいう. $\xi\in\Xi$ に対し, $S(\xi)=\{i\in I;\xi(i)=1\}$ と表すことにする.

$A,B\subset\Xi$ が単調増加のとき

$$A\circ B:=\{\xi\in\Xi;{}^\exists L\subset S(\xi);{}^\exists\eta\in A,{}^\exists\widetilde{\eta}\in B;S(\eta)=L,S(\widetilde{\eta})=S(\eta)\setminus L\}$$

とおく. ここで $\xi\in\Xi$, $L\subset I$ に対し, L 以外の状態を 0 にしたものを $\xi^{(L)}$; $\xi^{(L)}(j)=\xi(j)$ $(j\in L)$, $=0$ $(j\in I\setminus L)$ とすると, 次のようにも表される:

$$A\circ B=\left\{\xi\in\Xi;{}^\exists L\subset S(\xi);\xi^{(L)}\in A,\xi^{(S(\xi)\setminus L)}\in B\right\}.$$

定理 7.2 (BK 不等式)　$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ を確率 P のもと $[0,1]$ に値をとる独立な確率変数の系とする. このとき $A,B\subset\Xi$ が単調増加なら, 次が成り立つ:

$$P(\mathbf{X}\in A\circ B)\le P(\mathbf{X}\in A)P(\mathbf{X}\in B).$$

証明　$(\mathbf{X},P)$ と同じ分布をもつコピーを $(\mathbf{X}',P)$ として, その直積確率測度 $\widetilde{P}=P\otimes P$ を考える. $\widetilde{A}=A\times\Xi$, $\widetilde{B}_0=B\times\Xi$ として $k=1,\dots n$ に対し, $\widetilde{B}_k$ を $[(\xi,\xi')\in\widetilde{B}_k\iff\xi'$ の 1 から k までの状態と ξ の $k+1$ から n までの状態を合わせた配置 $T_k(\xi,\xi'):=(\xi'(1),\dots,\xi'(k),\xi(k+1),\dots,\xi(n))$ が B の元となる$]$ と定義する. $(T_0(\xi,\xi')=\xi,T_n(\xi,\xi')=\xi'$ に注意.) 更に

$$\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k:=\left\{(\xi,\xi')\in\Xi\times\Xi;{}^\exists L\subset S(\xi),{}^\exists L'\subset S(\xi');(\xi^{(L)},\xi'^{(L')})\in\widetilde{A},(\xi^{(S(\xi)\setminus L)},\xi'^{(S(\xi')\setminus L')})\in\widetilde{B}_k\right\}$$

とおくと $\widetilde{A},\widetilde{B}_k$ の定義から,

$$\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k=\left\{(\xi,\xi')\in\Xi\times\Xi;{}^\exists L\subset S(\xi);\xi^{(L)}\in A,T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L)},\xi')\in B\right\}$$

となる. 特に $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_0=A\circ B\times\Xi$, $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_n=A\times B$ となり,

$$P(\mathbf{X}\in A\circ B)=\widetilde{P}((\mathbf{X},\mathbf{X}')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_0),\quad P(\mathbf{X}\in A)P(\mathbf{X}\in B)=\widetilde{P}((\mathbf{X},\mathbf{X}')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_n)$$

が成り立つ. よって, $k=0,1,\ldots,n-1$ に対して次を示せばよい.

$$\widetilde{P}((\mathbf{X},\mathbf{X}')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\le\widetilde{P}((\mathbf{X},\mathbf{X}')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1}).$$

簡単のため, $(\mathbf{X},\mathbf{X}')$ の分布を μ とする, i.e., $\mu(U\times V)=\widetilde{P}((\mathbf{X},\mathbf{X}')\in U\times V)$. これにより $\mu(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\le\mu(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})$ を示せばよい. 今, $(\xi,\xi')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k$ に対し, $(\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\in\Xi\times\Xi$ を $(\xi,\xi')\in(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\cap(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})$ ならそのままとし, $(\xi,\xi')\in(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})$ なら ξ と ξ' の $k+1$ 番目を入れ替えるとして定義する. このとき

$$(\xi,\xi')\in(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})\ \Rightarrow\ (\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\in\widetilde{(}A\circ\widetilde{B}_{k+1})\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k) \tag{9}$$

が成り立ち (これは最後に示す), これから写像 $\widehat{\ }:\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k\to\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1};(\xi,\xi')\to(\widehat{\xi},\widehat{\xi}')$ が 1 対 1 であることが分かる (実際, $(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\cap(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})$, $(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})$ 上では 1 対 1 でそれらの行き先が交わらないから). 更に

$$\begin{aligned}
\mu((\widehat{\xi},\widehat{\xi}')) &= \widetilde{P}(X_j=\widehat{\xi}(j),X'_j=\widehat{\xi}'(j),j=1,\ldots,n)\\
&= \prod_{j\neq k+1}P(X_j=\xi(j))P(X'_j=\xi'(j))P(X_{k+1}=\xi'(k+1))P(X'_{k+1}=\xi(k+1))\\
&= \prod_{j=1}^{n}P(X_j=\xi(j))P(X'_j=\xi'(j)) \qquad (X_j\text{ と }X'_j\text{ が同分布だから})\\
&= \mu((\xi,\xi'))
\end{aligned}$$

が成り立つので, これから, 結局, 次をえる:

$$\begin{aligned}
\mu(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k) &= \sum_{(\xi,\xi')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k}\mu((\widehat{\xi},\widehat{\xi}'))\\
&= \mu(\{(\widehat{\xi},\widehat{\xi}');(\xi,\xi')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k\})\\
&\le \mu(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1}).
\end{aligned}$$

最後に (9) $[(\xi,\xi')\in(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})\ \Rightarrow\ (\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\in(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1})\setminus(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k)]$ を示そう. $\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\in\widetilde{(}A\circ\widetilde{B}_{k+1}$, $\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\notin(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k$ の順に示す. まず仮定より,

$$^{\exists}L_0\subset S(\xi);\xi^{(L_0)}\in A,T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')\in B,$$

$$^{\forall}L\subset S(\xi),\xi^{(L)}\in A\ \Rightarrow\ T_{k+1}(\xi^{(S(\xi)\setminus L)},\xi')\notin B.$$

即ち, $T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')\in B,T_{k+1}(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')\notin B$. これらの違いは $k+1$ 番目だけなので, B が単調増加であることから,

$$\begin{aligned}
&1=T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')(k+1)=\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)}(k+1),\\
&0=T_{k+1}(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')(k+1)=\xi'(k+1).
\end{aligned}$$

更に $\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)}$ の定義から, $k+1\notin L_0,\xi(k+1)=1$ をえる. また $j\in L_0$ なら $j\neq k+1$ で, $\widehat{\xi}$ の定義から, $\widehat{\xi}^{(L_0)}(j)=\widehat{\xi}(j)\xi(j)=\xi^{(L_0)}(j)$, i.e., $\widehat{\xi}^{(L_0)}=\xi^{(L_0)}$ $(\in A)$. 次に

$$T_{k+1}(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L_0)},\widehat{\xi}')=T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')\in B \tag{10}$$

を示す (これらから $(\widehat{\xi},\widehat{\xi}')\in\widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1}$ が従う). $j\le k+1$ なら

$$T_{k+1}(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L_0)},\widehat{\xi}')(j)=\widehat{\xi}'(j)=\begin{cases}\xi'(j) & (j\le k),\\ \xi(k+1) & (j=k+1).\end{cases}$$

一方, $k+1 \notin L_0, \xi(k+1)=1$ より, $k+1 \in S(\xi)\setminus L_0$ だから

$$T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')(j) = \begin{cases} \xi'(j) & (j \le k), \\ \xi(k+1) & (j = k+1). \end{cases}$$

$j > k+1$ なら $\xi(j) = \widehat{\xi}(j)$ $(j \neq k+1)$ に注意して,

$$T_{k+1}(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L_0)},\widehat{\xi'})(j) = \widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L_0)}(j) = \xi^{(S(\xi)\setminus L_0)}(j) = T_k(\xi^{(S(\xi)\setminus L_0)},\xi')(j)$$

をえて, (10) が成り立つ. 故に $(\widehat{\xi},\widehat{\xi'}) \in \widetilde{A}\circ\widetilde{B}_{k+1}$. 後は $(\widehat{\xi},\widehat{\xi'}) \notin \widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k$ を示せばよい. それには

$${}^{\forall}L \subset S(\widehat{\xi}), \widehat{\xi}^{(L)} \in A \;\Rightarrow\; T_k(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L)},\widehat{\xi'}) \notin B.$$

を示せばよい. 上の L に対し, もし $k+1 \in L$ なら $\widehat{\xi}(k+1) = \xi'(k+1) = 0$ から $k+1 \notin S(\widehat{\xi})$ となり矛盾. 故に $k+1 \notin L$ で, $\xi^{(L)} = \widehat{\xi}^{(L)} \in A$. このとき (10) と同様にして

$$T_k(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L)},\widehat{\xi'}) = T_{k+1}(\xi^{(S(\xi)\setminus L)},\xi') \notin B$$

を導くことができる (→ 問). よって $(\widehat{\xi},\widehat{\xi'}) \notin \widetilde{A}\circ\widetilde{B}_k$. ■

問 7.3 上の証明の最後の $T_k(\widehat{\xi}^{(S(\widehat{\xi})\setminus L)},\widehat{\xi'}) = T_{k+1}(\xi^{(S(\xi)\setminus L)},\xi') \notin B$ を示せ.

参考文献

[1] Fortuin, C. M., Kesten, P. W. and Ginibre, J.; Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*, **22**, 89–103 (1972).

[2] G. Grimmett; “Percolation”, Springer-Verlag New-York, 1989.

[3] Harris, T. E.; A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **56**, 13–20 (1960).

[4] 樋口 保成; 「パーコレーション」, 遊星社, 1992.