数学研究 II・卒業研究

確　率　論

Probability Theory

平場 研究室

『どんな現象でもその確率を測ることは出来るのか？』

確率論とはコイン投げや株価のように複雑な要因によって短時間に激しく変化する現象を数学的に扱おうとする学問である．そのとき, まず経験に基いて確率を決め, 議論して行くのだが, 果たしてどんな現象でもその確率を測ることは出来るのだろうか？

サイコロ投げでは, 各目の出る事象 (根元事象) の確率はそれぞれ 1/6 で, 例えば, 偶数の目の出る確率は 2, 4, 6 の 3 通りで 1/2 となる．従って根元事象の確率が分れば全ての確率が分かることになる．これは有限回の試行においては全くその通りである．しかし, 無限回の試行を考えた途端, この考え方は破綻してしまう．例えば, n 回のコイン投げで, 表の出続ける確率は普通 $1/2^n$ であると考えられるが, これを無限に投げ続けるとすれば, その確率は $\lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$ となる．この無限回の試行においては, どんな表裏の出方を考えても, その無限の列の確率は 0 となってしまう．ではこのとき確率というものは数学的にどう定義すれば良いのだろうか？0 はいくら足しても 0 ？だから, 無限の試行では確率というものは定義できないのだろうか？実際には, n 回まで表が出続けるという試行の確率は $1/2^n$ として, 考えられるのだから, 有限回の試行でも, 無限回の試行でも確率は存在するはずである.

そもそも無限回の試行を考えること自体が間違いなのだろうか？しかし, これが出来ないと, 表裏の出る回数の割合の極限などということが考えられなくなってしまう．直感的には回数を増やせば増やすほど, その割合は 1/2 に近づくはずであろう．つまり極限として 1/2 になる（という事象の確率が 1 になるはずであろう）と．これが実は**大数の法則 (Law of Large Numbers)** といわれるもので, これを数学として扱うためにはどうしても無限回の試行を考える必要があるのである.

そのために導入されたのが「**測度論 (Measure Theory)**」であり, 確率論と深く結びつくのである．そこでは確率は確率測度 (Probability measure) として定義され, **確率空間 (Probability Space)** というものの上で, 全ての議論が進められるのである.

目 次

1 確率測度と事象 (Probability Measures and Events)

定義 集合 Ω の部分集合族 $\mathcal{F}$ が

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$ (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

を満たすとき σ-**集合体** (**σ-field**) または σ-**加法族** (**σ-additive class**) という. また (3) のかわりに

(3′) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

を満たすとき, 単に **集合体** or **加法族**という. 明らかに σ-集合体は集合体である.

Ω の勝手な部分集合族 $\mathcal{A}$ に対し, これを含む最小の σ-field が存在する ($\to$ 問 4). それを $\sigma(\mathcal{A})$ で表し, $\mathcal{A}$ **で生成される σ-field** と呼ぶ. また $\mathcal{F}$ が σ-field のとき, $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間** (**measurable space**), $\mathcal{F}$ の元を**可測集合** (**measurable set**) という.

・$\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ $(A \subset \Omega)$, 2^{Ω} (全部分集合族) などはすべて σ-field である ($\to$ 確かめよ).

1. $\mathcal{F}$ を σ-集合体とし, $A, B, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ とする. 次も $\mathcal{F}$ に属することを示せ.

$$\emptyset, A \cap B, A \setminus B, A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

2. 次の集合族は集合体であるが σ-集合体ではないことを示せ.

(a) Ω が無限集合のとき $\{A \subset \Omega : A$ か A^c が有限集合または $\emptyset\ \}$

(b) $\Omega = \mathbf{R}, -\infty \le a \le b \le \infty$ に対し $(a, b]$ の形の区間の有限和で表される集合 $\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k]$ 全体,
但し, 区間 $(a, b]$ は $b = \infty$ なら (a, ∞), $a = b$ なら $\emptyset$ とみなす.

3. $\mathcal{F}$ を 集合体とする. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対し次を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を作れ.

$\{B_n\}$ は互いに素 (disjoint) で, 各 $n \ge 1$ に対し $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

4. $\mathcal{A}$ を Ω の部分集合族とする. $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap\{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ-field$\}$ で与えられることを次の手順で示せ. $\mathbf{F} := \{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ-field $\}, \mathcal{F}_0 = \bigcap \mathbf{F} = \{A \subset \Omega; {}^{\forall}\mathcal{F} \in \mathbf{F}, A \in \mathcal{F}\}$ とおく.

(1) $\mathbf{F} \neq \emptyset$, i.e., $\mathcal{A}$ を含む σ-field が一つはある. (2) $\mathcal{F}_0$ は σ-field (3) $\mathcal{F}_0$ は最小で一意

定義 Ω が位相空間のとき, 開集合の全体 $\mathcal{O}$ から生成される σ-field $\sigma(\mathcal{O})$ を **Borel field** と呼び $\mathcal{B}(\Omega)$ で表す. 特に $\Omega = \mathbf{R}^n$ のとき $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ を n **次元 Borel field** という.

5. $\Omega = \mathbf{R}$ とし, $\mathcal{C}$ をその閉集合の全体とする. このとき $\mathcal{B}^1 = \sigma(\mathcal{C})$ を示せ.

6. $\mathcal{A}_1 := \{(a, b) : -\infty \le a < b \le \infty\}$, $\mathcal{A}_2 := \{[a, b) : -\infty < a < b \le \infty\}$,
$\mathcal{A}_3 := \{[a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{A}_4 := \{(a, b] : -\infty \le a < b < \infty\}$, $\mathcal{A}_5 := \{(-\infty, r] : r \in \mathbf{Q}\}$
に対し, $\sigma(\mathcal{A}_i) = \mathcal{B}^1, i = 1, 2, 3, 4, 5$ となることを示せ.

ヒント：1 次元開集合は素な開区間の可算和で表される.

定義 集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 極限 $\lim_n A_n$ を $A_n \uparrow$ のとき $\lim_n A_n := \bigcup_{n \ge 1} A_n$ と定義し, $A_n \downarrow$ のとき $\lim_n A_n := \bigcap_{n \ge 1} A_n$ と定義する. また一般のときは

$$\text{上極限} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \text{下極限} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

とおき, この 2 つが等しいとき, それを $\lim_{n\to\infty} A_n$ で表す.

7. $(\limsup_n A_n)^c, (\liminf_n A_n)^c$ を $\{A_n^c\}$ を用いて表せ.

8. $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$ を示せ.

$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ として, $+\infty = \infty$ と表し, 便宜上, 次のように定める： $a \in \mathbf{R}$ (有限値) に対して

$$a \pm \infty = \pm\infty, \quad a \times \infty = \infty \ (a > 0), = -\infty \ (a < 0), \quad 0 \times \infty = \infty \times 0 = 0, \quad a/\infty = 0.$$

∞ を $-\infty$ に変えても同様である. また $\infty - \infty$ や ∞/∞ などは定義しない (できない).

注意　ここで注意して欲しいのは $\infty/\infty = \infty \times 1/\infty = \infty \times 0 = 0$ などという計算をしてはいけない！　ということである. 上の無限大はあくまで, 有限な値からの極限として考えるべきものである.

定義　$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする. 集合関数 $P = P(d\omega) : \mathcal{F} \to [0,1]$ が**確率測度** (**probability measure**) であるとは

(1) $P(\Omega) = 1$

(2) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が互いに素 (disjoint, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ if $i \neq j$) $\Longrightarrow$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-加法性})$$

を満たすときをいう. このとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間** (**probability space**) と呼ぶ. 更に $A \in \mathcal{F}$ を事象 (event) という.

以下 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を prob. sp. とする.

9. $A, B \in \mathcal{F}$ とする. 次を示せ.

(a) $P(\emptyset) = 0$ と**有限加法性**: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ disjoint $\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

(b) $A \subset B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(c) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$　(**単調性**)

(d) $P(A \triangle B) = 0 \Longrightarrow P(A) = P(B) = P(A \cap B) = P(A \cup B)$

(e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

10. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ とする. 次を示せ.

(a) $P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n)$　(σ-**劣加法性**)

(b) $A_n \uparrow \ \Longrightarrow P(\bigcup_n A_n) = \lim_n P(A_n)$ (**上方連続性**, 下のと併せて単に**単調連続性**という)

(c) $A_n \downarrow \ \Longrightarrow P(\bigcap_n A_n) = \lim_n P(A_n)$ (**下方連続性**)

(d) $P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n)$

(e) $P(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n P(A_n)$

ここで確率論において, 非常に良く用いられる, 重要な結果を問題の形で与えておく.

11. [**Borel-Cantelli の補題**]　$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}, \sum_n P(A_n) < \infty \Longrightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$

参考　一般に測度論では X を集合として, $\omega \in \Omega$ を $x \in X$ に, $P = P(d\omega)$ を $\mu = \mu(dx)$ に代えて,

・$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が $\mu(\emptyset) = 0$ と σ-加法性を満たすとき**測度** (**measure**) といい,
$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間** (**measure space**) という.

・$\mu(X) < \infty$ のとき, **有限測度** (**finite measure**) という, 特に $\mu(X) = 1$ のとき確率測度となる.

・また $\mu(X) = \infty$ であっても ${}^{\exists}A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}; \mu(A_n) < \infty \ ({}^{\forall}n)$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ のとき
μ は σ-**有限測度** (σ-**finite measure**) であるという.

2 確率空間の例 (Examples of Probability Spaces)

まず測度空間の例 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を挙げておく.

例 1　計数測度 (counting measure)
X：任意の集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とし, $\mu(A) = \sharp A$ (A の元の個数で, 有限でなければ無限大とする)

例 2　δ-測度 (Dirac measure)　X：任意の集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とし, $x \in X$ を任意に固定する.

$\mu(A) = 1$ if $x \in A$, $\mu(A) = 0$ if $x \notin A$. このとき $\mu = \delta_x$ と表す.

例 3　離散測度 (discrete measure)
$X = \{x_n\}$：可算または有限集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とする. $\mu = \sum_n p_n \delta_{x_n}$ $(p_n > 0)$

例 4　Lebesgue 測度 (Lebesgue measure)
$X = \mathbf{R}^n, \mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ とする. このとき $A = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k]$ $(-\infty \le a_k \le b_k \le \infty)$ に対し, $\mu(A) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ を満たす測度 μ が存在する. これを Lebesgue 測度といい, 記号で $|\cdot|$ や dx また $m = m(dx)$ などと表す.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の例を挙げる.

離散型確率空間 (discrete prob. sp.)　$p_k = P(\{k\})$ とおく $(\to P(d\omega) = \sum_k p_k \delta_k(d\omega))$

例 5　二項分布 (binary distribution)　$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, n\}, 0 < p < 1$

$$p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

例 6　ポアッソン分布 (Poisson dist.)　$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}, \lambda > 0$ に対し, $p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \cdots$.

例 7　幾何分布 (geometry dist.)　$\Omega = \mathbf{N}, 0 < p < 1$ に対し, $p_k = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, \cdots$.

連続型確率空間 (continuous prob. sp.)

例 8　一様分布 (uniform dist.)　$\Omega = (a, b), \mathcal{F} = \mathcal{B}(a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$,

$$P(A) = |A|/(b-a).$$

例 9　コーシー分布 (Cauchy dist.)　$\Omega = \mathbf{R}^1, \mathcal{F} = \mathcal{B}^1$, $m \in \mathbf{R}, a > 0$ に対し,

$$P(A) = \int_A \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + (x-m)^2} dx.$$

例 10　正規分布 (normal dist.) $N(m, v)$　$\Omega = \mathbf{R}^1, \mathcal{F} = \mathcal{B}^1$

$$P(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2v}\right] dx.$$

但し $m \in \mathbf{R}$ (平均), $v > 0$ (分散)

例 11　d 次元正規分布 $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{v})$　$\Omega = \mathbf{R}^d, \mathcal{F} = \mathcal{B}^d$

$$P(A) = \int_A \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\, Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right] d\boldsymbol{x}.$$

但し $\boldsymbol{m} \in \mathbf{R}^d$ (縦ベクトル), ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置 (横ベクトル), $\boldsymbol{v}$: 正値対称 $d \times d$ 行列, $Q = \boldsymbol{v}^{-1}$

1. 上の確率の全ての例に対し, $P(\Omega) = 1$ を確かめよ.

3 確率変数 (Random Variables)

定義 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ とおく. $X : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ が次を満たすとき, **確率変数**であるという：$\{X \le a\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$.

一般に測度論においては, 上の $X(\omega)$ on Ω を $f(x)$ on X で表し, $\mathcal{F}$-**可測関数 (measurable function)** というが, これは測度が無くても定義される. 即ち, 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上で定義される.

特に $(X, \mathcal{F}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ のとき $f : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ は **Borel-可測 (関数)**, または **Borel 関数**であるという.

1. $X : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ に対して次は同値であることを示せ：

   (1) X は $\mathcal{F}$-可測 (2) $\{X > a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$ (3) $\{X \ge a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$
   (4) $\{X < a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$ **ヒント**: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) を示せば良い.

2. 問 1 で条件 $[{}^\forall a \in \mathbf{R}]$ を $[{}^\forall a \in \mathbf{Q}]$ と置き換えられることを示せ.

3. $X : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ は $\mathcal{F}$-可測

   $\Longleftrightarrow X^{-1}(B) := \{X \in B\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall B \in \mathcal{B})$ かつ $\{X = +\infty\}, \{X = -\infty\} \in \mathcal{F}$ を示せ.

4. X, Y, X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\mathcal{F}$-可測なら, 次の関数も (定義されれば) そうであることを示せ.

   (1) αX $(\alpha \in \mathbf{R})$ (2) $X + Y$ (3) XY (4) $1/X$ (5) $|X|$ (6) $\sup_{n \ge 1} X_n$ (7) $\inf_{n \ge 1} X_n$
   (8) $\limsup_{n \to \infty} X_n$ (9) $\liminf_{n \to \infty} X_n$ (10) $\lim_{n \to \infty} X_n$

5. X, Y が $\mathcal{F}$-可測なら, $\sqrt{X}, X \vee Y, X \wedge Y$ も (定義されれば) そうであることを示せ.

   但し $X \vee Y(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$, $X \wedge Y(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$.

6. 連続関数は Borel 関数であることを示せ.

7. $\mathcal{F}$ を $\mathbf{R}$ 上の σ-field とする. 任意の連続関数が $\mathcal{F}$-可測となるならば, $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}$ となることを示せ.

定義 (1) $A \subset \Omega$ に対し $1_A(\omega) = 1$ $(\omega \in A)$, 0 $(\omega \notin A)$ と定義し, 1_A を A の**定義関数 (defining function)** という.

(2) $X : \Omega \to \mathbf{R}$ に対し, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ と Ω の有限可測分割 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ (i.e., $A_k \in \mathcal{F}$ 互いに素, $\bigcup A_k = \Omega$) が存在し,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(\omega)$$

と表せるとき X は**単関数 (simple function)** と呼ばれる.

8. 任意の非負確率変数 $X : \Omega \to [0, +\infty]$ に対して非負単関数の増加列 $\{X_n\}$ が存在して $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ on Ω を満たすことを示せ.

定義 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

(1) $P(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ を P-**零可測集合** という. また P-零可測集合 N が存在して $A \subset N$ なる集合を P-**零集合**という.

(2) Ω 上の命題関数 $Q(\omega)$ に対し $A = \{\omega \in \Omega : Q(\omega)$ が真$\} \in \mathcal{F}$ で, $P(A) = 1$ のとき, $Q(\omega)$ は**殆ど確実に成り立つ**といい「Q, P-a.s.」or 簡単に「Q a.s.」と表す. (a.s. は almost surely 略)

例えば, 確率変数 X, Y に対し, $P(X = Y) = 1$ なら $X = Y$, P-a.s. or $X = Y$ a.s. と表す.

9. 確率変数 X, Y, Z に対し, $X = Y$ a.s. かつ $Y = Z$ a.s. なら $X = Z$ a.s. を示せ. （ヒント 補集合と劣加法性）

4 期待値・平均値 (Expectations, Means)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で, 確率変数 X の期待値・平均値 EX を定義していく.

定義 非負可測単関数 $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ に対して, その平均を次で定義する:

$$EX = \int X dP = \int_\Omega X dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) := \sum_{i=1}^n a_i P(A_i).$$

1. 上の定義が well-defined, 即ち X の表現に依存しないことを示せ.
(別の表現 $X = \displaystyle\sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ を持つとしても $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i P(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$ を示せばよい. **共通の分割**.)

2. 非負可測単関数 X, Y に対し次が成り立つことを示せ.
(1) $E[X+Y] = EX + EY$ (2) $\alpha \geq 0 \Longrightarrow E[\alpha X] = \alpha EX$ (3) $0 \leq X \leq Y \Longrightarrow 0 \leq EX \leq EY$

定義 非負確率変数 X に対して, $\{X_n\}$ を非負可測単関数の増加列で, $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ なるものとする. (問 3-8) このとき次のように定義する.

$$EX := \lim_{n\to\infty} EX_n.$$

補題 上の定義は well-defined, 即ち $\{X_n\}$ の選び方に依存しない.

証明は非負可測単関数 $Y = \displaystyle\sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ に対して $Y \leq X \Rightarrow EY \leq \lim_{n\to\infty} EX_n$ を示せば十分 (何故か？).

$^\forall \varepsilon > 0$ 十分小, $A_n := \{X_n > Y - \varepsilon > 0\}$ とおけば $A_n \uparrow \{X > Y - \varepsilon > 0\} = \{Y > \varepsilon\} = \{Y > 0\}$ となる (実際, $0 < \varepsilon < \min\{b_j > 0\}$ ととれば良い). そこで単関数の平均の定義に戻して考えれば, $E[Y 1_{A_n}] \uparrow E[Y 1_{\{Y>0\}}] = EY$ と次が容易に分る.

$$E[Y 1_{A_n}] < E[(X_n + \varepsilon) 1_{A_n}] = E[X_n 1_{A_n}] + \varepsilon P(A_n) \leq E[X_n] + \varepsilon$$

従って, $n \to \infty$ として, $\varepsilon > 0$ の任意性から求める不等式を得る.

3. 非負確率変数 X, Y に対し, 上の 2 の (1) 〜 (3) を示せ. ((3) は近似列をどう取り直すか？)

4. $X : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ に対し, $X^+ := X \vee 0$, $X^- := -(X \wedge 0)$ とおく. $X = X^+ - X^-, |X| = X^+ + X^-$ を示せ.

定義 $X : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ を確率変数とする. EX^+, EX^- のいずれか一方が有限のとき, X の**平均は定義される** ($\pm\infty$ を含む) といい,

$$EX := EX^+ - EX^-$$

とする. また EX^+, EX^- が共に有限のとき, X は**可積分** (**integrable**) であるという.

5. 前のことを踏まえて, 確率変数 X に対し, $E|X| = EX^+ + EX^-$ を示せ.
このことより, X integrable $\Longleftrightarrow E|X| < \infty$ が分る.

定義 確率変数 X と事象 $A \in \mathcal{F}$ に対し, $X 1_A$ の平均が定義されるとき, X の A 上での平均を

$$E[X; A] := E[X 1_A] \quad \text{積分で表すと} \quad \int_A X dP := \int X 1_A dP$$

で定める. また次の関数空間の元を L^1**-関数** (L^1**-function**) と呼ぶ.

$$L^1 = L^1 := \{X : X \text{ は可積分な確率変数, i.e., } E|X| < \infty\}$$

平均の簡単な性質を述べる. 以下, X, Y は平均が定義されるものとする.

6. $A \in \mathcal{F}, P(A) = 0 \Longrightarrow E[X; A] = 0$
7. $E[aX] = aEX \quad ({}^\forall a \in \mathbf{R})$
8. $X, Y \in L^1 \Longrightarrow E[X+Y] = EX + EY$
   さらに条件を弱めて EX, EY 共に $> -\infty$ or $< \infty$ なら $E[X+Y] > -\infty$ or $< \infty$ で, 上式が成り立つ.
9. $A, B \in \mathcal{F}$ かつ $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow E[X; A \cup B] = E[X; A] + E[X; B]$
10. $X \leq Y$ a.s. $\Longrightarrow EX \leq EY$
11. $X = Y, P$-a.s. $\Longrightarrow EX = EY$
12. $X \geq 0, P$-a.s. かつ $EX = 0 \Longrightarrow X = 0, P$-a.s.
13. $E[X; A] = 0 \quad ({}^\forall A \in \mathcal{F}) \Longrightarrow X = 0, P$-a.s.
14. $X \in L^1 \Longrightarrow |X| < \infty, P$-a.s.
15. $Y \in L^1$ かつ $|X| \leq Y, P$-a.s. $\Longrightarrow X \in L^1$
16. $|EX| \leq E|X|$
17. $X = \mathrm{Re}X + i\mathrm{Im}X : \Omega \to \mathbf{C}$ (複素数値, $i = \sqrt{-1}$) で Re X, Im X ともに可積分のとき X も可積分であるといい, $EX := E[\mathrm{Re}X] + iE[\mathrm{Im}X]$ と定義する. このとき上に挙げた性質はすべてみたされることを示せ. (但し, 10, 12 は実数値のときの性質なので除く.)

---

6 はまず非負単関数に対して示し, 非負確率変数, 確率変数の場合に言及する. 7 は $a \geq 0$, $a = -1$ の順に示し, $a < 0$ のときは前のことから示せる. 8 で一般の確率変数の場合に次を用いる:

$$(X+Y)^+ + X^- + Y^- = (X+Y)^- + X^+ + Y^+, \quad (X+Y)^\pm \leq X^\pm + Y^\pm$$

9 は 8 より明らか.

10. a.s. が無いとき, i.e., $X \leq Y$ のときは $EX > -\infty$ かつ $EY < \infty$ のときを示せば十分で, しかも 8 より $X = 0$ として考えて良いことを言えば殆ど明らか. $X \leq Y, P$-a.s. のときは $A := \{X \leq Y\}$ とおいて 6, 9 を用いる.

11 は 10 より明らか.

12 . $A_n := \{X \geq 1/n\}$ を用いて示す.

13 . $A := \{X \geq 0\}$ より $X^+ = 0, P$-a.s. をいう. X^- の方も同様.

14. 対偶を示す. $|X| < \infty$, a.s. の否定は？

17. 複素数値のとき 16 をみたすことについて.

複素数 $z = |z|e^{i \arg z}$ について $|z| = e^{-i \arg z} z$ を用いる. 実際, ${}^\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} EX\right) = E\left[\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} X\right)\right] \leq E|X|$$

において, $\theta = \arg EX$ を代入すれば良い.

または, Schwartz を用いて, $\mathrm{Re}X \cdot \mathrm{Re}EX + \mathrm{Im}X \cdot \mathrm{Im}EX \leq |X||EX|$ が成り立つので, 平均をとれば良い.

5 収束定理 (Convergence Theorems)

ここでは $X, X_1, X_2, \cdots$ をある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数とする.

$P(\lim_n X_n = X) = 1$ のとき X_n は X に**概収束**するといい, $X_n \to X$, P-a.s. と表す. (測度論では P を μ として $\mu(\lim_n X_n \neq X) = 0$ のとき $X_n \to X$, μ-a.e. と表す. a.e. は almost everywhere の略)

1. 一般に $X_n \to X$, P-a.s. であっても, $EX_n \to EX$ が成り立つとは限らないが, その例を作れ.

   ヒント $\Omega = (0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}(0,1), P(d\omega) = d\omega$ として, $X_n \to 0$ (各点収束) かつ $EX_n = 1$ なるものを作れば良い.

定理 [単調収束定理 (Monotone Convergence Theorem)]

$[0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ かつ $X_n \to X \quad (n \to \infty)]$, P-a.s. ならば $EX = \lim_{n\to\infty} EX_n$.

(上の条件を簡単に $0 \leq X_n \uparrow X$ a.s. とも表す.)

(証明) Ω 上 $X_n \geq 0$ と考えてよい. X_n 単関数なら定義より明らか. "$\leq$" を示せば良い (逆は明らか). 各 X_n に対し, 非負単調増加単関数列 $\{X_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}; \lim_{k\to\infty} X_{n,k} = X_n$ が存在する. $Y_k := \max\{X_{n,k} : n \leq k\}$ (単関数となる), $Y := \lim_{k\to\infty} Y_k$ とおくと, $n \leq k \Rightarrow X_{n,k} \leq Y_k \leq X_k \leq X$ より $k \to \infty, n \to \infty$ とすれば, $Y = X$ を得て, Y_k が単関数であることから求める不等式が得られる.

補題 [Fatou の補題 (Fatou's Lemma)]

$X_n \geq 0, P$-a.s. $(n = 1, 2, \cdots)$ であれば $E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n$.

(証明) $Y_n := \inf\{X_k : k \geq n\}$ に対して MCT を用いれば良い.

定理 [Lebesgue の収束定理 (Lebesgue's Convergence Theorem)]

$Y \in L^1$ が存在して, $[|X_n| \leq Y \ (n = 1, 2, \cdots)$ かつ $X_n \to X \ (n \to \infty)], P$-a.s. ならば, $X \in L^1$ で $EX = \lim_{n\to\infty} EX_n$.

(証明) $-Y \leq X_n \leq Y, P$-a.s. に注意して $X_n + Y$ と $Y - X_n$ に対して Fatou's lemma を用いれば良い.

上に述べた 3 つの結果は一般の測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ でも成り立つが, その場合も記号に慣れるために記しておこう. $f, f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ を可測関数とする.

[単調収束定理 (Monotone Convergence Theorem)]

$0 \leq f_n \uparrow f$, μ-a.e. ならば $\displaystyle\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

[Fatou の補題 (Fatou's Lemma)]

$f_n \geq 0, \mu$-a.e. なら $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

[Lebesgue の収束定理 (Lebesgue's Convergence Theorem)] $L^1 = L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ とする.

$^{\exists}h \in L^1; [|f_n| \leq h, f_n \to f]$, μ-a.e. ならば, $f \in L^1$ で $\displaystyle\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

この定理は正確には **Lebesgue の優収束定理 (Dominated Convergence Theorem)** という. 特に $\mu(X) < \infty$ で h が定数としてとれるときには **Lebesgue の有界収束定理 (Bounded Convergence Theorem)** という.

ここで確率論で必ず現れる分布という言葉を定義し, それを用いた平均の表現について述べておく. 実数値確率変数 X に対し, $\mu(A) := P(X \in A)$ $(A \in \mathcal{B})$ とおくと, μ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率となり, これを X **の分布 (distribution)** という. 簡単に $\mu = P \circ X^{-1}$ or $\mu(dx) = P(X \in dx)$ などと表すこともある. また $\mu = \mu_X$ と表して, X によって決まることを強調する場合もある. (**注**　$(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度を単に**分布**ということもある.)

このとき有界な Borel 関数 f に対し, 平均は次のように表せる.

$$E[f(X)] = \int_\Omega f(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\mu_X(dx)$$

(一種の変数変換で, $f = 1_A$ のときは明らかで, 後は, 単関数, 非負 Borel 関数, 有界な Borel 関数に拡張していけば良い. ちなみに f は有界でなくても, $f(X) \in L^1$ でありさえすれば上は成り立つ.)

2. $X \geq 0$ a.s. なら $t \geq 0$ に対し, $L(t) := E[e^{-tX}]$ とおくと, 連続関数となることを示せ.

   ヒント　$^\forall t \geq 0, ^\forall\{t_n\} \subset [0, \infty); t_n \to t$ に対し, $L(t_n) \to L(t)$ を示せば良い (何故か？).

3. 上の問で更に $X \in L^1$ なら $L(t)$ は $t > 0$ について C^1 関数となることを示せ.

   $$\text{ヒント}\quad 0 < |h| < t/2 \Longrightarrow \left|\frac{e^{-(t+h)X} - e^{-tX}}{h}\right| = \frac{X}{|h|}\left|\int_0^h e^{-(t+s)X}ds\right| \leq Xe^{-tX/2} \leq X.$$

4. $i = \sqrt{-1}$ とする. $z \in \mathbf{R}$ に対し, $\varphi(z) := E[e^{izX}]$ とおくと, これも連続関数になり, さらに $|X|^n \in L^1$ なら C^n 関数となることを示せ.

5. 上の 3 つの問の結果を X の分布 μ を用いて書き直せ.

定理 [積分の絶対連続性 (Absolute Continuity)]

$X \in L^1$ に対し, $P(A) \to 0 \Longrightarrow E[X; A] \to 0$. 即ち

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\delta > 0; ^\forall A \in \mathcal{F}; P(A) < \delta, |E[X; A]| < \varepsilon.$$

(証明)　$|E[X; A]| \leq E[|X|; A]$ より, $X \geq 0$ として示せば十分で, $X_n := X \wedge n$ $(\uparrow X)$ とおくと MCT より $EX_n \uparrow EX$ が成り立つから, 次の不等式を用いればよい:

$$E[X; A] = E[X - X_n; A] + E[X_n; A] \leq E[X - X_n] + nP(A).$$

話は全く変わるが次節の補題の証明で必要になる定理を一つ述べておく.

定義　Ω のある部分集合の族 $\mathcal{M}$ が**単調族**であるとは $[A_n \in \mathcal{M} \uparrow \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}]$ かつ $[A_n \in \mathcal{M} \downarrow \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{M}]$ をみたすときをいう (つまり集合の単調増加・減少に関して閉じている).

またかってな部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族が唯一つ存在し, それを $m(\mathcal{A})$ で表す (証明は σ-field のときと同様である).

定理 [単調族定理 (Monotone Class Theorem)]　$\mathcal{A}$ が Ω 上の集合体なら $m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

(証明)　$m(\mathcal{A})$ が集合体であることを示せば十分. $\Omega \in m(\mathcal{A})$ は明らか. $\mathcal{M}_c := \{A \subset \Omega; A^c \in m(\mathcal{A})\}$ は単調族となり $\mathcal{M}_c \supset m(\mathcal{A})$. よって $A \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{A})$. 次に $A \in m(\mathcal{A})$ に対し, $\mathcal{M}_A := \{B \subset \Omega; A \cup B \in m(\mathcal{A})\}$ も単調族で, $\mathcal{M}_A \supset m(\mathcal{A})$ となることが示せて, $A, B \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{A})$ をえて証明が終わる. まず $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A \Rightarrow m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_A$. 次に $A \in m(\mathcal{A})$ なら $^\forall B \in \mathcal{A}$ に対し, 直前の議論で A, B 逆にして $A \cup B \in m(\mathcal{A}) \to B \in \mathcal{M}_A \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A \Rightarrow m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_A$ をえる.

6 直積確率空間 (Product Probability Spaces)

単調収束定理, Lebesgue の収束定理を正確に述べ, それらを用いて次の 1 から 3 を示せ.

1. $X_n \geq 0, P$-a.s. $(n=1,2,\cdots)$ ならば $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n| < \infty$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ は可積分で, $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n$.
3. $X \in L^1$ とする. $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ 互いに素なら $E\left[X; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X; A_n]$.

まず $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ を測度空間とする.

(ここで一般に P_i は確率である必要は無いが, すぐに σ-有限測度に制限する.)

定義 (1) $A = A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ $(A_j \in \mathcal{F}_j, j=1,\cdots,n)$ を**可測長方形**という.

(2) $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n)$ とおき, これを**直積 σ 集合体 (product σ-filed)** といい, $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n)$ を**直積可測空間** (**product measurable space**) と呼ぶ.

定理 $P_j, j=1,\cdots,n$ を **σ-有限測度**とする. このとき $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n)$ 上に次を満たす測度 P が一意に存在する. しかも, σ-有限である:

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n \quad (A_j \in \mathcal{F}_j, j=1,\cdots,n) \quad \text{に対し} \quad P(A) = P_1(A_1)\cdots P_n(A_n).$$

この定理は次の問と補題を用いて証明する.

定義 上の測度 P を**直積測度** (**product measure**) といい, $P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ で表す. また $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n, P_1 \otimes \cdots \otimes P_n)$ を**直積測度空間** (**product measure space**) という. 特に各 P_i が確率のとき, それぞれ **直積確率測度**, **直積確率測度空間**という.

4. $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$ を示せ. (即ち, $\sigma(\sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_3) = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3)$)

この問により上の定理の証明は $n=2$ のときに示せば十分である.

そこで $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Xi, \mathcal{G}, Q)$ を σ-有限測度空間とする. $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し,

$$A_\omega := \{\xi \in \Xi : (\omega, \xi) \in A\} \ (\omega \in \Omega), \quad A^\xi := \{\omega \in \Omega : (\omega, \xi) \in A\} \ (\xi \in \Xi)$$

とおいて, それぞれ A の **ω-切片**, **ξ-切片**という.

$(\Omega \times \Xi, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ 上の可測関数 X に対して

$$X_\omega : \xi \longmapsto X(\omega, \xi) \ (\omega \in \Omega), \quad X^\xi : \omega \longmapsto X(\omega, \xi) \ (\xi \in \Xi)$$

とおいて, それぞれ X の **ω-切片**, **ξ-切片**という.

補題 P, Q を σ-有限測度とする. $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し, 次が成立する：

(1) 各 $\omega \in \Omega$ に対し, $A_\omega \in \mathcal{G}$ で $\omega \longmapsto Q(A_\omega)$ は $\mathcal{F}$-可測関数,

(2) 各 $\xi \in \Xi$ に対し, $A^\xi \in \mathcal{F}$ で $\xi \longmapsto P(A^\xi)$ は $\mathcal{G}$-可測関数,

(3) $\displaystyle\int Q(A_\omega)P(d\omega) = \int P(A^\xi)Q(d\xi)$.

5. 上の補題において, σ-有限性の条件が必要であることを次の例で確かめよ：

   $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P)$ を Lebesgue 測度空間, $(\mathbf{R}, 2^{\mathbf{R}}, Q)$ を計数測度空間とし, $A = \{(a,a) : a \in \mathbf{R}\}$ とすると
$$\int_{\mathbf{R}} Q(A_\omega)P(d\omega) \neq \int_{\mathbf{R}} P(A^\xi)Q(d\xi)$$
   となるが各辺の値はいくつか？

6. $\mathcal{A}$ を可測長方形の有限和で表される集合の全体とする．次を示せ．

   (1) その元は可測長方形の素な有限和で表される． (2) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. (3) $\mathcal{A}$ は集合体である．

(補題の証明) 上の問の $\mathcal{A}$ の元に対しては明らかに成り立つ．まず P, Q が有限測度のとき, 補題をみたす集合の全体 $\mathcal{M}$ が単調族となることが容易に分かるので単調族定理と上の問より $\mathcal{M} \supset m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ をえる．P, Q が σ-有限のときは ${}^\exists\Omega_n \in \mathcal{F} \uparrow \Omega, \Xi_n \in \mathcal{G} \uparrow \Xi$; $P(\Omega_n), Q(\Xi_n) < \infty$ より $\Omega_n \times \Xi_n$ に制限したところでは成り立つから, 単調収束定理より $n \to \infty$ としても成り立つ．

(定理の証明) $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し,
$$(P \otimes Q)(A) = \int Q(A_\omega)P(d\omega) = \int P(A^\xi)Q(d\xi)$$
とおくとこれが求めるものとなる．実際 $(\Omega \times \Xi, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ 上の測度なることは σ-加法性を調べればよいが, それは単調収束定理を用いて容易に示せる．一意性は $\mathcal{A}$ で一致することから簡単に分かる．

7. P, Q が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の σ-有限測度で, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ なる集合体 $\mathcal{A}$ があるとする．${}^\exists A_n \in \mathcal{A}; \bigcup A_n = \Omega$, $P(A_n), Q(A_n) < \infty$ で, $\mathcal{A}$ 上で $P = Q$ なら $\mathcal{F}$ 上で $P = Q$ を示せ．

定理 **[Fubini の定理]** $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Xi, \mathcal{G}, Q)$ を **σ-有限測度空間**とする．
X を $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-可測関数とする．このとき $X(\omega, \xi)$ の ω-切片 X_ω, ξ-切片 X^ξ はそれぞれ $\mathcal{G}$-可測関数, $\mathcal{F}$-可測関数であり, 次が成立する：

(1) $X \geq 0, P \otimes Q$-a.e. とすると
$$\omega \longmapsto \int X_\omega dQ \quad \text{は } \mathcal{F}\text{-可測}, \quad \xi \longmapsto \int X^\xi dP \quad \text{は } \mathcal{G}\text{-可測}$$
であり,
$$\int X d(P \otimes Q) = \int dP \int X dQ = \int dQ \int X dP.$$

(2) X を一般の可測関数とする．このとき
$$\int |X| d(P \otimes Q), \quad \int dP \int |X| dQ, \quad \int dQ \int |X| dP$$
のうち１つでも有限ならば, その他のものも有限であり,
$$\int X d(P \otimes Q) = \int dP \int X dQ = \int dQ \int X dP.$$

(証明) 前の補題より $X(\omega, \xi) = 1_A(\omega, \xi)$ $(A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ に対して成り立つことから $(1_{A^\xi}(\omega) = 1_{A_\omega}(\xi) = 1_A(\omega, \xi)$ に注意), 後は単関数で近似して考えていけばよい．

8. 2 重数列 $\{a_{ij}\}$ に対して次が成り立つことを Fubini の定理を用いて示せ．
$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| < +\infty \text{ または } \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}| < +\infty \Longrightarrow \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}.$$

(ヒント) $(\omega, \xi) = (i, j)$ とし, $\Omega = \mathbf{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbf{N}}$ として, P をその上の計数測度として考える, i.e., $P(di) = \sum_{k=1}^\infty \delta_k(di)$. $(\Xi, \mathcal{G}, Q)$ も同様. では $X(i, j) =$?

9. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), Y \in L^1(\Xi, \mathcal{G}, Q)$ に対し $XY \in L^1(\Omega \times \Xi, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, P \otimes Q)$ であり，

$$\int_{\Omega \times \Xi} XY d(P \otimes Q) = \int_\Omega X dP \int_\Xi Y dQ$$

となることを示せ.

10. $X(\omega, \xi) = \dfrac{\omega^2 - \xi^2}{(\omega^2 + \xi^2)^2}$ とする．このとき

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 X(\omega, \xi) d\omega = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 d\omega \int_0^1 X(\omega, \xi) d\xi = \frac{\pi}{4}$$

となるが Fubini の定理に矛盾しないのは何故か？

7 L^p-空間, 収束概念 (L^p-spaces, Convergence Notion)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, その上の確率変数の全体を $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で表す. ここで P は一般の測度でも以下の話は成り立つが確率論での表し方に慣れてもらうためにそうしておく.

定義 $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), 1 \le p \le \infty$: **$L^p$-空間**

(1) $1 \le p < \infty$ のとき,

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{X \in M(\Omega, \mathcal{F}, P) : \|X\|_p < \infty\} \quad \text{但し}, \|X\|_p := (E[|X|^p])^{1/p}$$

とおき, $X \in L^p$ は p **乗可積分**, または **L^p-関数**であるという.

(2) $p = \infty$ のとき,

$$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{X \in M(\Omega, \mathcal{F}, P) : \|X\|_\infty < \infty\},$$

(但し, $\|X\|_\infty = \text{ess.sup}|X| := \inf\{\alpha : |X| \le \alpha, P\text{−a.s.}\}$: X の**本質的上限**) とおき, $X \in L^\infty$ は**本質的有界関数**, または単に **L^∞-関数**であるという. (このとき $|X| \le \|X\|_\infty < \infty, P$-a.s. となる)

(3) 上の $\|\cdot\|_p$ を **L^p-ノルム (norm)** といい, $\|\cdot\|_{L^p}$ と表すこともある.

定理 $1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty, 1/p + 1/q = 1$ とする. 但し, 一方が 1 のとき, 他方は ∞ と考える.

(1) **[Hölder の不等式]** $X \in L^p, Y \in L^q$ なら $XY \in L^1$ で $\|XY\|_1 \le \|X\|_p \|Y\|_q$, 特に p, q 有限なら $E|XY| \le (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}$.

(2) **[Minkowski の不等式]** $X, Y \in L^p$ に対し, $\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p$.

(証明) いずれも $p = 1, \infty$ のときは明らか. $1 < p < \infty$ のときを考える. (1) $XY = 0$, P-a.s. なら明らか. $A = \{XY \neq 0\}$ に対して $P(A) > 0$ として考える. log が上に凸より, $a, b > 0$ に対して $\frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b \le \log\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$, i.e., $a^{1/p}b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ 後は $a = |X|^p / E[|X|^p; A]$, $b = |Y|^q / E[|Y|^q; A]$ を代入し, A 上で積分してやればよい.

(2) $1/p + 1/q = 1$ より $q = p/(p-1)$ で,

$$E|X+Y|^p \le E[|X||X+Y|^{p-1}] + E[|Y||X+Y|^{p-1}]$$

において $|X+Y|^{p-1} \in L^q$ であることから Hölder の不等式を用いて, さらに $1 - 1/q = 1/p$ に注意すれば求めるものがえられる.

1. 上の証明を確かめよ.

定理 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p \le \infty)$ は P-a.s. で等しいものを同一視することにより, $\|\cdot\|_p$ をノルムとして, Banach 空間 (完備なノルム空間) となる. また $p = 2$ のときには $\langle X, Y\rangle = E[XY]$ により L^2 に内積が定義され, $(L^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は Hilbert 空間 (完備な内積空間) となる. 但し, 複素数値のときは $\langle X, Y\rangle = E[X\overline{Y}]$ と定義する.

(正確には同値関係 $[X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} X = Y,\ P\text{-a.s.}]$ をいれて, $X \in L^p$ の同値類 $[X] \in L^p/\sim$ に対し, $\|[X]\|_p = \|X\|_p$ でノルムを定義すると $(L^p/\sim, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間となる. しかし実際, 扱うときにはこれらを同一視してもあまり問題がないため, 単に $(L^p, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間であるという言い方をすることが多い.)

[参考] L を $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ 上の線形空間として, $\|\cdot\|$ がその上の**ノルム (norm)** であるとは $\|\cdot\| : L \to [0, \infty]$ 関数で $x, y \in L, a \in \mathbf{K}$ に対して次をみたすときをいう：
(1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (2) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.
このとき $(L, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という

また L 上の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

L の任意の Cauchy 列 $\{x_n\}$ が収束するとき, i.e., $^\exists x \in L; \|x_n - x\| \to 0$, L は $\|\cdot\|$ に関して**完備 (complete)** であるといい, このとき $(L, \|\cdot\|)$ を **Banach 空間**という

また $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が L 上の**内積 (inner product)** であるとは $\langle\cdot,\cdot\rangle : L\times L \to \mathbf{K}$;

(1) $\langle x,x\rangle \geq 0, = 0 \iff x = 0$, (2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, (3) $\langle x, ay+z\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

またこのとき $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を内積空間という. さらに $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ とおくとノルムとなり, このノルムで完備なとき **Hilbert 空間**という.

2. Cauchy 列のある部分列が収束すればそれ自身も同じ極限に収束することを示せ.

3. $(L, \|\cdot\|)$ complete $\iff$ $^\forall\{x_n\} \subset L; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, $^\exists \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in L$ を示せ.

ヒント ($\Leftarrow$) $\{x_n\}$ Cauchy 列なら $^\exists\{x_{n_j}\}; \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < 2^{-j}$ となり, x_{n_j} の収束が示せる.

(定理の証明) $^\forall\{X_n\} \subset L^p; \sum_n \|X_n\| < \infty$ に対して $X := {}^\exists \sum_n X_n$, P-a.s. かつ $X \in L^p$ を示せばよい. 単調収束定理より

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|\right\|_p = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} |X_k|\right\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|X_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \|X_k\|_p < \infty.$$

よって $\sum_n |X_n| < \infty$, P-a.s., これから $X = \sum_n X_n$ は P-a.s. で存在する. しかも

$$\|X\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|\right\|_p < \infty$$

より $X \in L^p$ をえる.

4. $1 \leq p < q \leq \infty$ に対し, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \supset L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ となることを示せ. (これは確率でなくても有限測度であれば一般に成り立つ.)

定義 (1) $1 \leq p < \infty$ とする. $X_n, X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し X_n は X に p **乗平均収束** or L^p**-収束**する;

$$X_n \to X \quad \text{in } L^p \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

(2) $X_n, X \in M(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする. X_n は X に**確率収束**する;

$$X_n \to X \quad \text{in pr.} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1, \quad \text{i.e., } P(|X_n - X|\varepsilon) \to 0.$$

また, X_n は X に**法則収束**する;

$$X_n \to X \quad \text{in law} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall f \in C_b(\mathbf{R}), \lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)].$$

ここで, $C_b(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の有界連続関数全体を表す.

(測度論では確率収束で, $\to 0$ の方を**測度収束**といい, $P = \mu$ として "in pr." のかわりに "in μ" とかく.)

5. "**概収束** $\Longrightarrow$ **確率収束**" となることを示せ.

(一般の測度論では μ が有限測度なら "**概収束** $\Longrightarrow$ **測度収束**")

6. $X_n, X \in M(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $1 \leq p < \infty$ に対し, **Chebyshev の不等式**

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} E[|X_n - X|^p].$$

を示し, "L^p**-収束** $\Longrightarrow$ **確率収束** " となることを確かめよ.

7. 0 に確率収束しても L^1-収束しない例を挙げよ.

8. 0 に確率収束しても 概収束しない例を挙げよ.

   ヒント 7. $[0,1]$ Lebesgue 測度空間で, 平均 (積分) 値は 1 だが, 関数が 0 にならないところの長さが 0 に収束するもの. 8. 同様に定義関数列で 0 にならない区間が動き回りながら, その長さは 0 に収束するもの.

定理 (1) ある $1 \le p \le \infty$ に対し, 関数列が L^p-収束するなら, 確率収束する. 逆は一般にいえない.

(2) 確率収束するなら, 適当な部分列をとれば概収束するようにできる. 即ち

$$X_n \to X \quad \text{in pr.} \quad (n \to \infty) \Longrightarrow {}^{\exists}\{X_{n_k}\} \subset \{X_n\}; X_{n_k} \to X, \quad P\text{-a.s.} \quad (k \to \infty).$$

(3) "**概収束 $\Longrightarrow$ 確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束**".

(証明) (2) $P(\{|X_{n_k} - X| \ge 1/2^k\}) < 1/2^k$ をみたす部分列がとれるから, Borel-Cantelli の補題 ($\sum P(A_k) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_k) = 0$) から $P(\lim X_{n_k} \ne X) = 0$ が従う.

9. 上の証明を厳密に述べよ.

10. "**確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束**" を示せ.

    ヒント ${}^{\exists}\{n_k\}; \limsup E[f(X_n)] = \lim_{k\to\infty} E[f(X_{n_k})]$ が言える (確かめよ.) ので, 更に, その部分列で概収束するものをとり, それを再び同じ記号 $\{X_{n_k}\}$ で表せば, 容易. $\liminf$ も同様.

8 大数の法則 (Law of Large Numbers)

X_k を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とする $(k = 1, 2, \ldots, n)$. このとき $\{X_k\}_{k=1}^n$ が**独立 (independent)** であるとは

$$P(X_1 \le a_1, \cdots, X_n \le a_n) = P(X_1 \le a_1) \cdots P(X_n \le a_n) \quad ({}^\forall a_k \in \mathbf{R}, k = 1, \ldots, n).$$

さらに上で n が無限のとき $\{X_k\}_{k\ge 1}$ が独立であるとは ${}^\forall N \ge 1$ に対して $\{X_k\}_{k=1}^N$ が独立なときをいう. 特に X_k が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j\ge 1}$ しかとらないとき, 上の式は次のように変えても良い:

$$P(X_1 = b_1, \cdots, X_n = b_n) = P(X_1 = b_1) \cdots P(X_n = b_n) \quad (b_k \in S, k = 1, \ldots, n).$$

確率変数 X に対して, その分散を $V(X) := E[(X - EX)^2] = E[X^2] - E[X]^2$ で定義する.

1. 実数値確率変数列 $\{X_k\}_{k=1}^n$ が**独立 (independent)** $\Longleftrightarrow$

$$P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n) \quad ({}^\forall A_k \in \mathcal{B}^1, k = 1, \ldots, n).$$

定理 $X_1, \ldots, X_n$ を確率変数として, $E[X_k^2] < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ とする. このとき $X_1, \ldots, X_n$ が独立なら, $E[X_j X_k] = E[X_j]E[X_k]$ $(j \ne k)$. さらに平均が 0 $(E[X_k] = 0)$ なら

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n E[X_k^2].$$

[証明] (1) 一般に任意の有界 Borel 関数 f, g と独立確率変数 X, Y に対し, $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$ が成り立つ. 実際, $f(x) = 1_A(x), g(x) = 1_B(x)$ $(A, B \in \mathcal{B}^1)$ に対し,

$$E[1_A(X)1_B(Y)] = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) = E[1_A(X)]E[1_B(Y)].$$

これから f, g を単関数, 非負 Borel 関数, 有界 Borel 関数まで拡張できる. さらに $f_n(x) = g_n(x) := x1_{|x|\le n}$ として Lebesgue の収束定理を用いれば, $E[XY] = E[X]E[Y]$ が示せる.

(2) 展開式 $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{j\ne k} X_j X_k$ と (1) より $j \ne k$ なら $E[X_j X_k] = E[X_j]E[X_k] = 0$ となることから明らか. ■

コイン投げで, 投げる回数を増やしていくと表の出る割合が 1/2 に近づいていくという現象がある. これが大数の法則の典型的な例であるが, このとき 1 回毎にコインを投げるという行為は独立である.

数式化するには n 回目にコインを投げて, 表なら $X_n = 1$, 裏なら $X_n = 0$ と決める. このとき確率平均は $EX_n = 1/2$ (ちなみに分散は $V(X_n) = 1/2$ で有界). このとき n 回まで投げて, 表の出た回数の算術平均は $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ で, 大数の法則とはこれが $n \to \infty$ のとき, 確率平均の 1/2 に「近づく」ということである.

定理 [**大数の弱法則 (Weak Law of Large Numbers)**]

$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $EX_n = m$, 分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする. このとき次が成り立つ：${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right| \ge \varepsilon\right) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

[証明] $\{X_n\}$ が独立であるから $\{\widetilde{X}_n = X_n - m\}$ も独立となる (確かめよ). よって

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$$

から, X_n の代わりに $\widetilde{X}_n$ を考えることにより，初めから $m = 0$, i.e., $E[X_n] = 0$ として良い．このとき $V(X_n) = E[X_n^2]$ で, 前命題から

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \le n \sup_n V(X_n) = nv.$$

よって $^\forall\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \ge \varepsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \ge \varepsilon n\right) \le \frac{E[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2]}{\varepsilon^2 n^2} \\ &\le \frac{nv}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{v}{\varepsilon^2 n} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

■

上の定理と同じ条件のもとで, もっと強い結果が成り立つ. それが次の定理である.

定理 [**大数の強法則 (Strong Law of Large Numbers)**] $X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で，平均一定 $EX_n = m$，分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする．このとき次が成り立つ：

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) = 1.$$

注意 (1) 上の主張は, 次のもっと強い条件のもとでは簡単に証明できる.

[$\sup E[X_n^4] < \infty$ **のもとでの定理の証明**]

X_n の代わりに $X_n - m$ を考えることにより， $m = 0$, i.e., $E[X_n] = 0$ として示せばよい．まず $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4$ の展開式を考えるのだが，独立性と平均が 0, さらに $E[X^2] \le (E[X^4])^{1/2}$ に注意して，

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^4] + \sum_{i\ne j, 1\le i,j\le n} E[X_i^2]E[X_j^2] \le n^2 \sup_k E[X_k^4]$$

をえるから，単調収束定理 (or Fubini の定理) を用いて

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sup_k E[X_k^4] < \infty.$$

よって $P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4 < \infty\right) = 1$. これは $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right) = 1$ を意味する. ■

(2) 一般に, 平均が一定でない場合でも, 次が成り立つ.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0\right) = 1.$$

[証明の流れ] まず $EX_n = 0$ として示せば良く, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k/k)$ に対し,

(a) **Kolmogorov の最大不等式**より $\sup_{k \geq n} |\overline{S_k} - \overline{S_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$ in pr.

(b) 「確率収束なら適当な部分列に対して概収束」を用いれば,
確率 1 で $\{\overline{S_n}\}$ が Cauchy 列, 故に収束列.

(c) **Kronecker の補題**より $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ P-a.s.

という手順で示す. そのため Kolmogorov の最大不等式と Kronecker の補題を先に与え, 証明する.

補題 **[Kolmogorov の最大不等式]**

$\{X_n\}$ を独立な確率変数列で, 平均 $EX_n = 0$ とする. 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ に対し,

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 P(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a) \leq E[|S_N|^2; \max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a] \leq E[|S_N|^2]$$

[証明] $S^{(k+1)} = X_{k+1} + \cdots + X_N$, $A_k = \{|S_k| \geq a, |S_1| < a, \ldots, |S_{k-1}| < a\}$ とおくと, $S^{(k+1)}$ と $S_k 1_{A_k}$ は独立で $E[S_k S^{(k+1)}; A_k] = E[S_k 1_{A_k}] E[S^{(k+1)}] = 0$. また $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ (素和). よって

$$\begin{aligned}
E[|S_N|^2; \max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a] &= \sum_{k=1}^{N} E[(S_k + S^{(k+1)})^2; A_k] = \sum_{k=1}^{N} E[S_k^2 + 2S_k S^{(k+1)} + (S^{(k+1)})^2; A_k] \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} E[S_k^2; A_k] \geq \sum_{k=1}^{N} a^2 P(A_k) \quad (A_k \text{ 上 } |S_k| \geq a \text{ より}) \\
&= a^2 P(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq a)
\end{aligned}$$

■

補題 **[Kronecker の補題]**

数列 $\{x_n\}$ と $\{a_n\}; 0 < a_n \uparrow \infty$ に対し,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} \quad \text{exists} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

[証明] $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k/a_k) \to s$ とする.

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} (s_k - s_{k-1}) = s_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_n} s_k.$$

結局, 題意は

$$s_n \to s \quad \text{なら} \quad \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) s_k \to s$$

の証明に帰着する. これは $s^* = \sup_m |s_m| < \infty$ と ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N; {}^\forall k \geq N, |s_k - s| < \varepsilon$ より, $n > N$ に対し, 和を N で分けて

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)s_k - s\right| \quad \left(s = \frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)s + \frac{a_N}{a_n}s \quad \text{として}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)|s_k - s| + \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k+1}-a_k)(\sup_m |s_m|) + \frac{a_N}{a_n}|s| \\
\leq\ & \varepsilon\frac{a_n - a_N}{a_n} + s^*\frac{a_N - a_1}{a_n} + \frac{a_N}{a_n}|s| \\
\to\ & \varepsilon \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

よって $\varepsilon > 0$ の任意性から極限は 0. ■

[**大数の強法則の証明**] まず X_n の代わりに $\widetilde{X}_n = X_n - EX_n$ を考えると $\{\widetilde{X}_n\}$ も独立で $V(\widetilde{X}_n) = V(X_n) \leq v$ より, 初めから $EX_n = 0$ として示せば十分. このとき独立性から $E[X_n X_m] = E[X_n]E[X_m] = 0$ $(m \neq n)$, また $E[X_n^2] = V(X_n) \leq v$. そこで $\overline{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k}$ とおくと, Kolmogorov の最大不等式より, 任意の $a > 0$ に対し,

$$a^2 P(\max_{n<k\leq N}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \geq a) \leq E[|\overline{S}_N - \overline{S_n}|^2] = \sum_{k=n+1}^{N}\frac{E[X_k^2]}{k^2} \leq \sum_{k>n}\frac{v}{k^2}.$$

順に $N \to \infty$, $n \to \infty$ として,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k>n}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \geq a) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \sup\nolimits_{k>n}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \to 0 \ (n \to \infty) \text{ in pr.}$$

よって適当な部分列 $\{n_j\} \subset \mathbf{N}; n_j \uparrow \infty$ をとれば,

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{k\geq n_j}|\overline{S_k} - \overline{S}_{n_j}| = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

これから $n, m \geq n_j$ なら $|\overline{S_n} - \overline{S_m}| \leq |\overline{S_n} - \overline{S}_{n_j}| + |\overline{S_m} - \overline{S}_{n_j}| \to 0$ $(j \to \infty)$ P-a.s., 即ち, $\{\overline{S_n}\}$ は Cauchy 列となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k} = \lim_{n\to\infty}\overline{S_n}$ が確率 1 で存在する. 従って Kronecker の補題を用いれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k = 0$ P-a.s. をえる. ■

上の証明から次が成り立つ.

系 $\{X_n\}$ を平均 0 の独立な確率変数列とする. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V(X_k) < \infty$ なら極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k$ は確率 1 で存在する.

系 大数の法則の定理の条件の下, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次も成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{1+\delta}}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

証明は大数の法則の証明で $\overline{S_n}$ として $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k/\sqrt{k^{1+\delta}})$ を考えれば良い.

では上で δ を 0 としたときにはどうなるのだろうか？この疑問に対する (適当な条件の下での) 答えを与えるのが次の中心極限定理である.

その前に正規分布を定義しておく.

$\mathbf{R}$ 上の確率測度 (これも単に**分布**という) $\mu(dx) = g(x)dx$ が

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$$

で与えられるとき, これを平均 m, 分散 v の**正規分布 (normal dist.)**, あるいは**ガウス分布 (Gauss dist.)** といい, それを表す記号として $N(m, v)$ を用いる.

ここで言葉を一つ解説しておく. 確率変数 X, Y が同分布であるとは任意の $a \in \mathbf{R}$ に対し, $P(X \geq a) = P(Y \geq a)$ が成り立つときをいい, 記号で $X \overset{\text{(d)}}{=} Y$ と表す. ($X = Y$ in the sense of distribution の意)

定理 **[中心極限定理 (Central Limit Theorem)]**

確率変数列 $\{X_n\}$ を独立同分布とする (independent identically distributed = i.i.d. と表す). その平均 $EX_1 = m$, 分散 $V(X_1) = v$ とすると $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 v の正規分布 $N(0, v)$ に収束する, i.e., 任意の $a < b$ に対し,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2v}} dx.$$

言い換えれば, $\frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0, v)$ に収束する,

この定理の証明はここでは与えないが, 特性関数と呼ばれる, 確率測度の Fourier 変換を用いて, それが収束すると分布も収束するという事実を用いて証明される. .

A 測度の拡張定理 (Extension Theorem of Measures)

第 2 節で測度の例として Lebesgue 測度を挙げたが, 実はそれが存在することの証明を与えていない. そのためにはまず区間の長さは分っている (決められている) から, それを区間で生成される σ-field, つまり Borel field 上へ拡張できるということを示せば良い. もう少し一般的に言うと集合体で定義された測度の元になる関数が, その集合体で生成される σ-field 上へ拡張できることを示す. それが次に述べる測度の拡張定理である.

$(X, \mathcal{F}_1, \mu), (X, \mathcal{F}_2, \nu)$ をそれぞれ測度空間とし, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ とする. $\nu|_{\mathcal{F}_1} = \mu$, i.e., $\mathcal{F}_1$ 上 $\mu = \nu$ ならば μ は ν の**制限**, あるいは ν は μ の**拡張**という.

また集合体 $\mathcal{A}$ の上で定義された関数 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ が有限加法性をみたすとき μ_0 を $\mathcal{A}$ **上の加法的集合関数**という.

定理 [Carathéodory の拡張定理] $\mathcal{A}$ を X 上の集合体とする. $\mathcal{A}$ 上の加法的集合関数 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ が $\mu_0(\emptyset) = 0$ をみたし, $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的

$$A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{disjoint かつ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \implies \mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

であるなら, $(X, \sigma(\mathcal{A}))$ 上の測度 μ で $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ なるものが存在する. さらに μ_0 が $\mathcal{A}$ 上 σ-有限:

$$^\exists\{X_n\} \subset \mathcal{A}; \mu_0(X_n) < \infty, \bigcup X_n = X$$

なら μ も明らかに σ-有限で, しかも一意に定まる.

この証明は最後に述べるが, 方針としてはまず任意の集合に対して定義される**外測度 (outer measure)** と呼ばれるものを導入し, それを $\sigma(\mathcal{A})$ 上に制限したものが求めるものとなることを示す.

1. 定理の μ_0 は $\mathcal{A}$ 上, (有限) 加法性, 単調性, そして (有限) 劣加法性をみたすことを確かめよ.

この定理を用いて Lebesgue 測度の存在を示そう.

定理 [Lebesgue 測度の存在] $A = \prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k]$ $(-\infty \le a_k \le b_k \le \infty, k = 1, 2, \ldots, n)$ に対し, $\mu(A) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ を満たす $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$ 上の測度 μ が一意に存在する. これを Lebesgue 測度といい, 記号で $|\cdot|$ や dx また $m = m(dx)$ などと表す.

(証明) $n = 1$ で示せば十分. ($n \ge 2$ のときは直積測度を考えれば良いから.) $(a, b]$ $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ の形の素な有限和で表される集合の全体を $\mathcal{A}$ とすれば, これは集合体となる ($\to$ 問題 1-2 (b)). $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$ に対し, $m_0(A) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ と定義すれば, $m_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 集合関数で $\mu_0(\emptyset) = 0$ をみたす. 後は拡張定理の最後の条件をみたすことを示せば良いが, それは

$$(c, d] = \bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j, d_j](\text{素和}) \implies m_0((c, d]) = \sum_{j=1}^{\infty} m_0((c_j, d_j])$$

を示すことに帰着する. 加法性と単調性より "$\ge$" はすぐ分かる. 逆を示す. まず $-\infty < c < d < \infty$ とする. $0 < {}^\forall\varepsilon < d - c$, $[c + \varepsilon, d] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j, d_j + \varepsilon/2^j)$ で $[c + \varepsilon, d]$ コンパクトより ${}^\exists N$; $(c+\varepsilon, d] \subset [c+\varepsilon, d] \subset \bigcup_{j=1}^{N}(c_j, d_j + \varepsilon/2^j)$. よって単調性, 劣加法性より $d - (c+\varepsilon) = m_0((c+\varepsilon, d]) \le m_0(\bigcup_{j=1}^{N}(c_j, d_j + \varepsilon/2^j)) \le \sum_{j=1}^{N}(d_j + \varepsilon/2^j - c_j) < \sum_{j=1}^{\infty}(d_j - c_j) + \varepsilon$ となり, $\varepsilon > 0$ の任意性から $d - c \le \sum_{j=1}^{\infty}(d_j - c_j)$, i.e., $m_0((c, d]) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_0((c_j, d_j])$ をえる. ■

定義　集合関数 $\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$ が**外測度**とは次をみたすときをいう：
(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(2) $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu^*(A) \subset \mu^*(B)$
(3) $A_n \in 2^X, n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.
またこのとき次をみたす集合 $A \subset X$ を μ^*-**可測**という：

$$^\forall B \subset X, \quad \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

(条件 (1), (3) より, 逆の不等号が成り立つから, 上の "$\geq$" は実は "$=$" となる.)

補題　μ^* が X 上の外測度なら $\mathcal{F}^* = \{A \subset X; A$ は μ^*-可測 $\}$ は σ-field となり, μ^* は $(X, \mathcal{F}^*)$ 上の測度となる.

2. まず上の $\mathcal{F}^*$ が集合体であることを確かめよ.

(補題の証明)　互いに素な集合 $A_n \in \mathcal{F}^*, n = 1, 2, \ldots$ と $^\forall B \subset X$ をとる. 帰納法により任意の k に対し,

$$\mu^*(B) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*(B \cap (\bigcup_{n=1}^{k} A_n)^c)$$

が成り立つ. (実際, $A_k \cup A_{k+1}$ を一つの集合と見て, k 個のとき成り立つと仮定して

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap (A_k \cup A_{k+1})) &= \mu^*(B \cap (A_k \cup A_{k+1}) \cap A_k) + \mu^*(B \cap (A_k \cup A_{k+1}) \cap A_k^c) \\ &= \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap A_{k+1}) \end{aligned}$$

を用いれば $k+1$ 個のときも成り立つことが分かる.) 従って,

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*(B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c)$$

で, $k \to \infty$ とすれば,

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*(B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c)$$

をえる. さて $\mathcal{F}^*$ が σ-field であることを示すのだが, 前問より集合体であるから, $A_n \in \mathcal{F}^*, n = 1, 2, \ldots$ が互いに素のときに $\bigcup A_n \in \mathcal{F}^*$ を示せばよいがこれは上の式と σ-劣加法性よりすぐ分かる. また $B = \bigcup A_n$ を代入すれば $\mu^*(\bigcup A_n) \geq \sum \mu^*(A_n)$ をえて, 逆も σ-劣加法性より分かるので μ^* が $\mathcal{F}^*$ 上, σ-加法性を持ち, 測度となる. ■

(拡張定理の証明)　まず

$$\mu^*(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n); A_n \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

とおくと, これは X 上の外測度となり, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$ となることを示す.

外測度の条件 (1), (2) は明らか. (3) を示す. $A_n \subset X, n = 1, 2, \ldots$ をとる. $^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists\{A_{n,k}\} \subset \mathcal{A}$; $A_n \subset \bigcup_k A_{n,k}$ かつ $\sum_k \mu_0(A_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. よって μ^* の定義より

$$\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n \sum_k \mu_0(A_{n,k}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

となり, $\varepsilon \downarrow 0$ として (3) をえる. 次に $A \in \mathcal{A}$ とする. ${}^\forall B \subset X, \varepsilon > 0$, ${}^\exists \{B_n\} \subset \mathcal{A}; B \subset \bigcup B_n$ かつ $\sum \mu_0(B_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. よって

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \sum \{\mu_0(B_n \cap A) + \mu_0(B_n \cap A^c)\} = \sum \mu_0(B_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

となり, $\varepsilon > 0, B \subset X$ の任意性より A は μ^*-可測となる.

以上から $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}^*$ で, μ^* は $\mathcal{F}^*$ 上, σ-加法的であるから, $\sigma(\mathcal{A})$ 上でもそうである. $\mu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ とおくと求めるものとなる. また $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ が容易に示せるから, これから一意性も従う. ($\to$ 問題 6-7 参照.) ■

3. $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \mu^*(A) = \mu_0(A)$, 即ち, $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ を確かめよ.

定理 [近似定理 (Approximating Theorem)] $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ が加法族なら,

$${}^\forall A \in \sigma(\mathcal{A}), {}^\exists A_n \in \mathcal{A}; \lim_{n \to \infty} \mu(A \triangle A_n) = 0.$$

系 $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu)$ を測度空間とする. $A \in \mathcal{B}^d$ に対し, ${}^\exists C_n$ 有界閉集合, ${}^\exists G_n$ 開集合; $C_k \subset A \subset G_k$, $\lim \mu(A \setminus C_n) = \lim \mu(G_n \setminus A) = 0$.

B 完備測度空間 (Complete Measure Spaces)

定義 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

(1) $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ を **μ-零可測集合** という. また μ-零可測集合 N が存在して $A \subset N$ なる集合を **μ-零集合**という.

(2) μ-零集合がすべて可測であるとき, μ は**完備測度**であるという.

1. 上の拡張定理の証明の $(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ は完備測度空間であることを示せ.
2. "任意の測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し, 完備測度空間 $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ が存在し, $\overline{\mu}$ は μ の拡張である" という定理を次の手順で示せ.

   (1) $\overline{\mathcal{F}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ は $\mathcal{F}$ を含む σ-field

   (2) $A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}$ に対し, $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ とおくと, これは $(X, \overline{\mathcal{F}})$ 上の測度となる.

   (3) $\overline{\mu}$ は完備測度である.

定義 上で得られた $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の**完備化測度空間**という.

3. 拡張定理で μ_0 が σ-有限なら, $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$ の完備化測度空間が $(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ と一致することを示せ.

定義 前の Lebesgue 測度 m の存在定理の証明における m_0 から定義される外測度 m^* に対して, m^*-可測な集合を **Lebesgue 可測集合**という. 上の問から $(\mathbf{R}^n, \overline{\mathcal{B}^n}, \overline{m}) = (\mathbf{R}^n, (\mathcal{B}^n)^*, m^*)$ で, 簡単のため $\overline{m} = m^*$ を m で表し, $(\mathbf{R}^n, \overline{\mathcal{B}^n}, m)$ を Lebesgue 測度空間という. これにより $\overline{\mathcal{B}^n}$ の元が Lebesgue 可測集合であると定義しても良い.

Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係について述べておく.

定理 閉区間 $[a, b]$ 上の有限な関数 f が Riemann 可積分ならば, Lebesgue 測度に関して可積分でその値は一致する, 即ち

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)m(dx).$$

ここで, 左辺は Riemann 積分, 右辺は完備化された Lebesgue 測度 m による Lebesgue 積分とする.

(証明) 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分し, その分割に対する Riemann 和 (Darboux 和ともいう) を考える. そのとき各小区間で上限, 下限それぞれに値をとる単関数 g_n, h_n の極限を各々 g, h すると, $h \le f \le g$ で, また収束定理よりその Lebesgue 積分は f の Riemann 積分と等しくなる. このことより $h = g$, m-a.s. 従って完備化された Lebesgue 測度空間で考えれば $h = f = g$, m-a.s. で, f も可測, しかも可積分となり求める結果を得る.

[3 の解答]
$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ として, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^*$ を示せば良い.
[$\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^*$ について]
$\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^*$ を示せば十分. $A \in \mathcal{N}$ なら $^\exists N \in \mathcal{F}; A \subset N$ で, 外測度 μ^* の定義より, 明らかに $\mu^*(A) = 0$. よって $^\forall B \subset X$, $\mu^*(B \cap A) \le \mu^*(A) = 0$, $\mu^*(B \cap A^c) \le \mu^*(B)$. 従って, $\mu^*(B) \ge \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$. これより $A \in \mathcal{F}^*$.

[μ_0 が σ-有限のとき $\overline{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}^*$ について]
明らかに μ^* も σ-有限であるから, μ^* が有限測度のとき示せば十分. $^\forall A \in \mathcal{F}^*, ^\exists A_0 \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{N}; A = A_0 \cup C$ を示せば良い. $A^c \in \mathcal{F}^*$ で, これに対して外測度 μ^* の定義より, $^\forall n \ge 1, ^\exists B_n \in \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}; \mu^*(A^c) \le \mu(B_n) < \mu^*(A^c) + 1/n$ が言える. そこで $B = \bigcap B_n$ とおけば $B \in \mathcal{F}$, $\mu(B) = \mu^*(A^c)$. μ^* が有限であること

と $A \in \mathcal{F}^*$ (つまり有限加法性を満たすこと) より $\mu^*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(A^c)$. よって $A_0 = B^c \in \mathcal{F}$ とおけば $A_0 \subset A, \mu^*(A) = \mu(A_0)$ で, これより容易に $C = A \setminus A_0 \in \mathcal{N}$ が言える. 実際, $\mu^*(C) = \mu^*(A) - \mu(A_0) = 0$ で, 外測度の定義より, 上と同様なやり方で, $^\exists N \in \mathcal{F}; C \subset N, \mu(N) = 0$, i.e., $C \in \mathcal{N}$.

ちなみに
「μ_0 が σ-有限 $\iff$ μ^* が σ-有限」について.
$(\Rightarrow)$ は明らかだが, $(\Leftarrow)$ は少し工夫がいるが, ここまで読めた諸君ならば容易に示せるであろう.

これまで述べた話の他に, 重要な話題としては

1. Lebesgue 非可測集合の存在

2. Radon-Nikodym の定理

   さらにこれを確率論へ応用した

3. σ-field での条件付き確率の定義

   また測度の拡張定理からえられる

4. 無限次元直積測度

5. Kolmogorov の拡張定理

   などは無限の時間を持つ確率過程 $\{X_n = X_n(\omega)\}_{n=1,2,\dots}$ や $\{X_t = X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ などを定義するのに必要不可欠である. 特に確率過程論で重要な役割を果たすのが「**ブラウン運動 (Brownian motion)**」と呼ばれるもので, 水面に浮かんだ花粉のランダムな運動を表すのだが, あの物理で有名な A. Einstein も論文を書いていて, 最終的に N. Wiener によって数学的に導入され, **Wiener 過程**とも呼ばれている. このブラウン運動を基本とした確率過程論において日本人でも「伊藤　清」が**伊藤積分**と呼ばれる確率過程による積分を定義し, さらに**伊藤の公式**と呼ばれる, 今日の確率解析では常識となっている大変重要な公式を発見している.

現在, 確率論は非常に広い範囲に渡って, 応用され, 発展して行っている. 物理などではかなり昔から, 電子の確率的挙動など. (Einstein はそれを認めず, 「神様はサイコロ遊びなど, なさらない！」と言ったという.) 生物では遺伝子の突然変異を組み込んだ, 遺伝学への応用や, 子を生んで, 老いて死んで世代交代して行くという人口動態モデルなどがある. また化学では高分子合成において, 媒体上にできる様子を確率方程式として表すなど. 経済では株価の変動を確率過程として, 証券市場などで新しい商品を開発したときにその価格をどう決めればいいかを導くための理論である数理ファイナンスなどの分野へという具合に.

このように測度論を元にして, 確率論は広い, 深い世界を手に入れた. これらのことに興味のある人は, 是非, 色んな現象を確率論と組み合せて, さらに新しい世界を見い出して行って欲しい.

C 測度の拡張定理の応用

本節では測度の拡張定理を用いて, 確率論で特に必要となる 3 つの重要な定理について紹介する.

まず拡張定理の確率バージョンを述べておく.

[確率測度の拡張定理] $\mathcal{A}$ を Ω 上の集合体とする. $\mathcal{A}$ 上の加法的集合関数 $P_0 : \mathcal{A} \to [0,1]$ が $P_0(\Omega) = 1$ をみたし, $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的

$$(1) \qquad A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1,2,\ldots) \text{ disjoint かつ } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \implies P_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(A_n)$$

であるなら, $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ 上の確率測度 P で $P|_{\mathcal{A}} = P_0$ なるものが唯一つ存在する.

ここで上の (1) 「$\mathcal{A}$ 上 σ-加法的」と同値な条件を述べておく.

$$(2) \qquad A_n \in \mathcal{A} \downarrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} P_0(A_n) = 0$$

$$(3) \qquad A_n \in \mathcal{A} \downarrow, \lim_{n\to\infty} P_0(A_n) > 0 \implies \bigcap_{n\geq 1} A_n \neq \emptyset$$

実際, 応用においては (3) をチェックすることが多い.

C.1 Lebesgue-Stielties 測度

定義 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数 X に対し, $F(x) := P(X \leq x)$ とおき, これを X の分布関数 (distribution function) という.

1. このとき $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ は次を満たす.

   (1) 単調増加, i.e., $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

   (2) 右連続で, 左極限をもつ, i.e., $F(x) = F(x+) := \lim_{y\to x, y>x} F(y)$, $^{\exists}F(x-) := \lim_{y\to x, y<x} F(y)$.

   (3) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

定義 上の問の 3 つの性質を満たす関数 $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ が与えられたとき, この $F(x)$ を単に **$\mathbf{R}$ 上の分布関数**という.

ではこの分布関数が与えられたとき, $F(x) = P(X \leq x)$ を満たすような確率空間と確率変数が存在するか？という逆問題が考えられるがその答えを肯定的に与えるのが次の定理である.

定理 [Lebesgue-Stielties 測度 (Lebesgue-Stielties measure)]

分布関数 $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ に対し, $^{\exists 1}\mu : \mathcal{B}^1 \to [0,1]$ 分布; $\mu((-\infty, x]) = F(x)$.

定義 この分布 μ on $(\mathbf{R}, \mathcal{B}^1)$ を分布関数 $F(x)$ による **Lebesgue-Stielties 測度 (分布)** という. またこれによる積分が定義できるが, それを

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dF(x) := \int_{\mathbf{R}} f(x)\mu(dx); \quad \textbf{Lebesgue-Stielties 積分}\text{という.}$$

注 F の値域を $[0,1]$ から $\mathbf{R}$ に変えても (このとき分布関数とは呼ばないが), 同様な結果が成り立つので, 一般的に μ を Lebesgue-Stielties 測度という呼び方をする.

C.2 無限次元直積確率空間

$(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ を確率空間とする. n 個の有限次元確率空間を次のようにおく.

$$(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)}, P^{(n)}) := (\prod_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k, \bigotimes_{k=1}^{n} P_k)$$

$\Omega := \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ とおく.

$$\mathcal{A} = \left\{ A = A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots ; A_n \in \mathcal{F}^{(n)}, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

とおくと $\mathcal{A}$ は Ω 上の加法族となる. この元 $A = A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots$ に対し, $P_0(A) = P^{(n)}(A_n)$ とおけば, $P_0(\emptyset) = 0$ をみたす $\mathcal{A}$ 上の加法的集合関数となる. さらに拡張定理の条件 (3) をみたすことが示せる. 従って $^{\exists_1} P$ 確率測度 on $\sigma(\mathcal{A})$; $P = P_0$ on $\mathcal{A}$. 即ち, 各 n に対し,

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \quad (A_k \in \mathcal{F}_k)$$

をみたす $\sigma(\mathcal{A})$ 上の確率測度が一意的に存在する. このとき $\displaystyle\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k := \sigma(\mathcal{A})$, $\displaystyle\bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n := P$ と表し, $\displaystyle(\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n)$ を $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の**無限次元直積確率空間 (infinite-dimensional product probability space)** という.

C.3 Kolmogorov の拡張定理

各 $n \geq 1$ に対し, $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, P_n)$ を n 次元確率空間とする. これが次の両立条件

$$P_n(A) = P_{n+1}(A \times \mathbf{R}) \quad (A \in \mathcal{B}^n)$$

をみたすとする.

$$\mathcal{B}^{\infty} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\infty}) := \sigma(\bigcup_{n \geq 1} (\mathcal{B}^n \times \mathbf{R}^{\infty}))$$

を無限次元 Borel 集合体といい, このとき $P(A_n \times \mathbf{R}^{\infty}) = P_n(A_n)$ $(A_n \in \mathcal{B}^n)$ をみたす $(\mathbf{R}^{\infty}, \mathcal{B}^{\infty})$ 上の確率測度 P が一意的に存在する.

実際, 上と同様に $\mathcal{A} = \{A = A_n \times \mathbf{R}^{\infty}; A_n \in \mathcal{B}^n, n = 1, 2, \ldots\}$ とおき, この元 $A = A_n \times \mathbf{R}^{\infty}$ に対し, $P_0(A) = P_n(A_n)$ とおけば, $P_0(\emptyset) = 0$ をみたす $\mathcal{A}$ 上の加法的集合関数で, 拡張定理の条件 (3) をみたすことが示せる. 従って $P(A_n \times \mathbf{R}^{\infty}) = P_n(A_n)$ $(A_n \in \mathcal{B}^n)$ をみたす $\mathcal{B}^{\infty} = \sigma(\mathcal{A})$ 上の確率測度 P が一意的に存在する.