# 確率過程の基礎；
# マルコフ過程とマルチンゲール
## Basics of Stochastic Processes;
## Markov Processes and Martingales

平場　誠示 (HIRABA, Seiji)

2024 年 4 月 23 日

## 目次


1 **確率過程の定義** (Definitions of Stochastic processes) 1

2 **離散時間マルコフ連鎖** (Discrete-time Markov Chains) 1

2.1 基本的な例 . . . . . 1

2.2 時間的一様マルコフ連鎖 . . . . . 2

2.3 $d$ 次元ランダムウォーク . . . . . 7

2.4 ゴルトン-ワトソン過程 . . . . . 9

3 **マルチンゲール** (Martingales) 12

3.1 ラドン-ニコディムの定理と条件付平均値 . . . . . 12

3.2 一様可積分性 . . . . . 14

3.3 マルチンゲールの定義と性質、ドゥーブ分解 . . . . . 16

3.4 停止時刻と任意抽出定理 . . . . . 17

3.5 劣マルチンゲール不等式と収束定理 . . . . . 19

4 **連続時間マルコフ連鎖** (Continuous-time Markov Chain) 23

4.1 指数時間 . . . . . 23

4.2 ポアッソン過程 . . . . . 24

4.3 連続時間ランダムウォーク . . . . . 28

4.4 連続時間ゴルトン-ワトソン過程 . . . . . 29

4.5 連続時間マルコフ連鎖と推移確率 . . . . . 29


本テキストでは, 離散時間・連続時間の確率過程について, マルコフ性とマルチンゲール性に関する話題を広く、浅く解説する. マルコフ過程の例として, ランダムウォーク, ゴルトン・ワトソン過程, ポアッソン過程を挙げ, それらの性質についても述べる.

# 1 確率過程の定義 (Definitions of Stochastic processes)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において, $n \in \mathbf{N}$ or $\mathbf{Z}_+$, i.e., $n = 1, 2, \ldots$ or $n = 0, 1, 2, \ldots$, あるいは, $t \in [0, \infty)$ を時間として見て (それぞれ離散時間, 連続時間という), これらによって添字付けられた確率変数の集まりを**確率過程 (Stochastic processes)** という.

但し, **確率空間 (probability space)** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とは, $\Omega \neq \emptyset$ は集合 (**全体集合** or **全事象**) で, $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ は $\sigma$**-加法族**, その元 $A \in \mathcal{F}$ を **事象 (event)**, $P = P(d\omega)$ は **確率測度 (prob. measure)** である. ($2^\Omega$ は全部分集合族を表す.)

$(X_n) = \{X_n\} = \{X_n\}_{n \geq 0}$ を**離散時間確率過程 (discrete-time stoch. proc.)**

$(X_t) = \{X_t\} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ を**連続時間確率過程 (continuous-time –)** という.

また, **情報系 (filtration)** $(\mathcal{F}_n)$, i.e., 時間と共に増大する $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族の列; $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ が与えられたとき, 各時点 $n$ ごとに, $X_n$ が $\mathcal{F}_n$ 可測の時, $(X_n)$ は $(\mathcal{F}_n)$**-適合 (adapted)** な確率過程であるといい, 今後, 特に断らない限り, この条件は常に満たされているものとする.

$n$ を $t$ に変えても全く同様である.

本テキストでは, まず, 離散時間の確率過程のマルコフ性とマルチンゲール性について議論し, 最後に, 連続時間のマルコフ過程についても議論する.

# 2 離散時間マルコフ連鎖 (Discrete-time Markov Chains)

確率過程とは時間とともにランダムに変化・運動していく対象を指すが, まずは離散時間において「マルコフ連鎖」と呼ばれる確率過程について解説する.

## 2.1 基本的な例

マルコフ連鎖とは未来の行動が, 現在の状態にのみによって決まり, 過去の行動には依存しない確率過程をいう. 正確な定義は後で述べるとして, まず, 基本的な例を 2 つ挙げよう. 一つ目は, **ランダムウォーク**と呼ばれるものである. ランダムウォークは日本語で「酔歩」というが, 確率過程の中でも, 最も単純なモデルで様々な性質が研究されている.

**例 2.1** 整数 $\mathbf{Z}$ 上での**ランダムウォーク (random walk)** $(X_n, P)$ で, 時刻 0 で, 原点 O を出発するとする; $X_0 = \mathrm{O}$. $0 < p < 1$ に対し, 時刻 1 で, $+1$ に確率 $p$ でジャンプし, $-1$ に確率 $q = 1 - p$ でジャンプする. さらに一般に, 時刻 $n$ で場所 $x$ にいるなら時刻 $n + 1$ で, $x + 1$ へ確率 $p$ で, $x - 1$ へ確率 $q$ でジャンプする;

$$P(X_{n+1} = x + 1 |\ X_n = x) = p, \quad P(X_{n+1} = x - 1 |\ X_n = x) = q.$$

時刻 $n$ から将来どこへ行くかは, 時刻 $n$ での場所のみに依存し, それ以前にいた場所には依存しない. これがマルコフ性といわれるものである.

2 つ目は, **ゴルトン-ワトソン過程 (BGW or GW 過程)** と呼ばれる家系に関する世代交代の人口モデルで, Bienaymé, Galton, Watson の 3 人が家系が頻繁に失われていくことに気づき, 1 つの家系が永久に存続する確率を計算した.

**例 2.2** 各世代の男性数を表す, **ゴルトン-ワトソン過程 (Bienaymé-Galton-Watson process)** $(Z_n, P)$ とは, まず各男性には, 生存中に $Y$ 人の男子が生まれると仮定する. 但し, $Y$ は非負整数 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $P(Y = k) = p_k$ をみたすとする ($p_k$ は分布で, $p_k \geq 0, \sum p_k = 1$ をみたす). $Z_n$ を第 $n$ 世代の男性の数とする. ここで出発点は 1 人の祖先とする; $Z_0 = 1$. 生まれた各男性は独立に $Y$ と同じ確率で男子を残して行くとする. このモデルでは, 家系が永久に存続する確率が正かどうかは, 子孫の平均値 $m = \sum kp_k$ に依存することが示せる.

## 2.2 時間的一様マルコフ連鎖

本節では次の結果を紹介する.

**定理 2.1** 可算集合 $S$ に値をとる既約で時間的一様なマルコフ連鎖は再帰的か, 過渡的のいずれかの状態になる.

さて数学が一般に嫌われるのは,「同じ日本語なのに聞いていて, チンプンカンプンで理解不能だから」と良く言われるが, 初めて聞く人にとってはこれがまさにそうだろう. 原因は単純で, それは数学用語の定義が分っていないからである.

「既約」「時間的一様」「マルコフ連鎖」「再帰的」「過渡的」

マルコフ連鎖とは, 次にどう動くかが, 現在の状況のみに依存して, 過去には無関係であるようなものをいうが, いい加減な表現をすれば「行き当りばったりプロセス」あるいは「その場しのぎプロセス」といっても良いだろう. 正確な定義は次のとおりである.

$S$ を可算集合として, $S$ に値をとる確率過程 $(X_n, P) = (X_n(\omega), P(d\omega))$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が次をみたすとき**マルコフ連鎖 (Markov Chain)** という:

(M1) **[マルコフ性]** $n \geq 1, j_0, j_1, \dots, j_n, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k |\ X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) = P(X_{n+1} = k |\ X_n = j_n).$$

さらに次の性質をみたすとき**時間的一様なマルコフ連鎖**という.

(M2) **[時間的一様性]** $n \geq 1, j, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k |\ X_n = j) = P(X_1 = k |\ X_0 = j) \ (=: q(j,k) \text{ と表す}).$$

本テキストでは時間的一様でないものは扱わないので以下ではマルコフ連鎖といったときは全て, 時間的一様なマルコフ連鎖を指すものとする.

$X_0$ の分布 $\mu = \{\mu_j\}$; $\mu_j = P(X_0 = j)$ を**初期分布 (initial distribution)** といい, 特に, ある $j \in S$ に対し, $P(X_0 = j) = 1$ のとき確率 $P$ を $P_j$ で表し, $(X_n, P_j)$ を $j$ を出発するマルコフ連鎖という. (これは $P(X_0 = j) > 0$ のとき, $P_j(\cdot) := P(\cdot |\ X_0 = j)$ で定義するというのと同じことで, 実際に計算するときはこちらの方が都合が良い.)

$n \geq 0, j, k \in S$ に対し, $q_n(j,k) = P(X_n = k |\ X_0 = j)$ とおき, $Q_n = (q_n(j,k))$ を $n$ **階推移確率 (行列) ($n$-step transition probability (matrix))**, 特に, $Q_1$ を $Q = (q(j,k))$ で表し, 単に, **推移確率 (行列)** という.

**問 2.1** 次を示せ.
(i) $q_n(j,k) \geq 0$, $\sum_k q_n(j,k) = 1$ $(j \in S)$,
(ii) $n \geq 1$, $j_0, j_1, \ldots, j_n \in S$ に対して

$$P(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n) = \mu_{j_0} q(j_0, j_1) \cdots q(j_{n-1}, j_n),$$

(iii) $m, n \geq 1$, $j_1, \ldots, j_m, k_0, k_1, \ldots, k_n \in S$ に対して

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m | \, X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) \\ = q(k_n, j_1) q(j_1, j_2) \cdots q(j_{m-1}, j_m). \end{aligned}$$

(iv) $Q_0 = I := (\delta_{jk})$ (単位行列), $Q_n = Q^n$ $(n \geq 1)$, 但し, $\delta_{jk} = 1$ $(j = k)$, $= 0$ $(j \neq k)$.

**問 2.2** 初期分布を $\mu = \{\mu_j\}$ とするとき $X_n$ の分布が次で与えられることを示せ.

$$P(X_n = k) = \sum_{j \in S} \mu_j q_n(j,k).$$

今, $j \in S$ への**再帰時間 (recurrence time)**: $T_j$ を次で定義する:

$$T_j = \inf\{n \geq 1; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

- $j$ が**再帰的 (recurrent)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P_j(T_j < \infty) = 1$,
- $j$ が**過渡的 (transient)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $P_j(T_j < \infty) < 1$

と定義する.
全ての $j$ が再帰的 (or 過渡的) なら $(X_n)$ は再帰的 (or 過渡的) であるという.

マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ あるいは推移確率 $Q = (q(j,k))$ が**既約 (irreducible)** であるとは任意の $j, k$ に対し, $j \to k$, 即ち, ある $n \geq 1$ が存在し, $q_n(j,k) > 0$ をみたすときをいう. つまり, どこから出発しても何ステップかで, どこへでもいける可能性があるということである. (もう少し分りやすくいうと, トラップと通過するだけの点, 絶対に行けない点がないということである.)

次の事実が時間的一様なマルコフ連鎖に対する, 本節のメインの結果である:

**定理 2.2** $j, k \in S$ とする.
(i) $j$ が再帰的という条件は次のそれぞれと同値:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) = \infty$. b) $P_j(\{X_n\}$ は $j$ に無限回戻る $) = 1$.
(ii) $j$ が過渡的という条件は次のそれぞれと同値:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) < \infty$. b) $P_j(\{X_n\}$ は $j$ に無限回戻る $) = 0$.
(iii) $\{X_n\}$ が既約なマルコフ連鎖なら, 再帰的か, 過渡的かのどちらかになる

まず (i), (ii) の b) について述べ, それから a) の判定定理, (iii) について証明を与える.
次の命題の証明で用いる問いを 2 つ挙げておく.

**問 O-1** $m, n \geq 1$, $j_1, \ldots, j_m, k_0, k_1, \ldots, k_n \in S$ に対して

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m |\ X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) \\ &\qquad = P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m |\ X_n = k_n). \end{aligned}$$

**問 O-2** 事象列 $\{B_k\}_{k=1}^n$ が互いに素で, 事象 $A, C$ に対し, $P(A|\ B_k) = P(A|\ C)$ $(1 \leq k \leq n)$ をみたしているとする. このとき $P(A|\ \bigcup B_k) = P(A|\ C)$ が成り立つことを示せ.

**命題 2.1** (i) $j \in S$ が再帰的なら $P_j(\{X_n\}$ は $j$ に無限回戻る $) = 1$.
(ii) $j \in S$ が過渡的なら $P_j(\{X_n\}$ は $j$ に無限回戻る $) = 0$.

**証明** 直感的には理解できるであろう. 再帰的な場合は, 有限時間で戻る確率が 1 だから, 1 回目に戻ったときから考えれば, 再び有限時間で戻るからそれを繰り返せばよい. 過渡的な場合は戻る確率が 1 より小さいからそれを繰り返していけば, 確率は 0 に近づく.
$m$ 回目に $j$ に戻る時間を $T_j^{(m)}$ とおく.

$$T_j^{(1)} = T_j, \quad T_j^{(m)} = \min\{n > T_j^{(m-1)}; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

まず $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ を示す. 自然数 $s, t$ に対し, マルコフ性と時間的一様性を用いて,

$$P_j(T_j^{(m)} = s + t|\ T_j^{(m-1)} = s) = P_j(T_j = t)$$

が示せて (実際, [左辺]$= P(X_{s+t} = j, X_{s+u} \neq j\ (1 \leq u \leq t-1)|\ T_j^{(m-1)} = s)$ で, $\{X_u \neq j\} = \bigcup_{k_u \in S; k_u \neq j} \{X_u = k_u\}$ と $\{T_j^{(m-1)} = s\}$ が $\{X_1, \ldots, X_s (= j)\}$ の状態によって決まることに注意して, 上の 2 つの問 O-1, O-2 を用いれば良い.) これと $P(A \cap B) = P(B|\ A)P(A)$ より

$$P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) = P_j(T_j^{(m-1)} = s) P_j(T_j = t)$$

をえる. よって

$$\begin{aligned} P_j(T_j^{(m)} < \infty) &= P_j(T_j^{(m-1)} < T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \sum_{s=m-1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) \\ &= P_j(T_j^{(m-1)} < \infty) P_j(T_j < \infty) \end{aligned}$$

より, $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ が分かる. これより

$$\begin{aligned} P_j(\{X_n\} \text{ は } j \text{ に無限回戻る}) &= P_j(\bigcap_m \{T_j^{(m)} < \infty\}) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j < \infty)^m. \end{aligned}$$

これは $P_j(T_j < \infty) = 1$ なら 1, そうでないなら 0 である. ■

再帰的, 過渡的の判定定理の証明のためにまずいくつか記号を定義する. $j,k \in S$ に対し, $f_m(j,k) := P_j(T_k = m)$ $(m \geq 1)$ とおき

$$Q_{jk}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,k)s^n \quad (|s|<1), \quad F_{jk}(s) := \sum_{m=1}^{\infty} f_m(j,k)s^m \quad (|s| \leq 1)$$

とおく. それぞれ $\{q_n(j,k)\}_{n\geq 0}$, $\{f_m(j,k)\}_{m\geq 1}$ の**母関数 (generating functions)** という.
$\lim_{s\uparrow 1} Q_{jk}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,k)$ と $F_{jk}(1) = P_j(T_k < \infty)$ に注意せよ.

**補題 2.1** $j,k \in S$ に対し, 次が成り立つ:

$$q_n(j,k) = \sum_{m=1}^{n} f_m(j,k)q_{n-m}(k,k) \ (n \geq 1), \quad Q_{jk}(s) = \delta_{jk} + F_{jk}(s)Q_{kk}(s) \quad (|s|<1).$$

**証明** $\{T_k = m\} = \{X_m = k, X_s \neq k \ (1 \leq s \leq m-1)\}$ に注意して

$$\begin{aligned} q_n(j,k) = P_j(X_n = k) &= \sum_{m=1}^{n} P_j(X_n = k, T_k = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m)P_j(X_n = k|\ T_k = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m)P_j(X_n = k|\ X_m = k) \\ &= \sum_{m=1}^{n} f_m(j,k)q_{n-m}(k,k). \end{aligned}$$

またこれを用いて (更に和の順序交換 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}$ も)

$$Q_{jk}(s) = \delta_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(j,k)s^n = \delta_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_m(j,k)q_{n-m}(k,k)s^n = \delta_{jk} + F_{jk}(s)Q_{kk}(s).$$

■

**命題 2.2** $j \in S$ が再帰状態 $\iff \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) = \infty.$

**証明** 上の補題より $Q_{jj}(s)(1 - F_{jj}(s)) = 1$ $(|s|<1)$ が成り立つから $F_{jj}(1) = P_j(T_j < \infty)$ と

$$\lim_{s\uparrow 1} Q_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) \leq \infty$$

に注意して $s \uparrow 1$ とすれば分かる. (形式的に次のように表せる:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j)(1 - P_j(T_j < \infty)) = 1.$$

これから $P_j(T_j < \infty) = 1$ なら $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) = \infty$, $P_j(T_j < \infty) < 1$ なら $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) < \infty$.) ■

**問 2.3** 上の証明を参考に $j \neq k$ のときを考えることにより

$$j \in S \text{ 過渡的 } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q_n(k,j) < \infty \ ({}^{\forall} k \in S)$$

を示せ. (当然, この対偶: 「${}^{\exists} k \in S;\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(k,j) = \infty \ \Rightarrow \ j:$ 再帰的」も成り立つ.)

($\sum_n q_n(k,j) = F_{kj}(1) \sum_n q_n(j,j)$ を用いる.)

$j,k \in S$ に対し $j \to k$ かつ $k \to j$ のとき $j \leftrightarrow k$ と表す.

**命題 2.3** $j,k \in S; j \leftrightarrow k$ に対し, $j$ が再帰的, 過渡的ならそれに応じて $k$ もそうなる. 従って, 既約なマルコフ連鎖は再帰的, 過渡的のいずれかになる.

**証明** 仮定の $j \leftrightarrow k$ より, ${}^{\exists}\ell, m \geq 0; q_\ell(j,k) > 0, q_m(k,j) > 0$. また

$$q_{\ell+m+n}(j,j) \geq q_\ell(j,k) q_n(k,k) q_m(k,j) \quad (n \geq 0)$$

より

$$Q_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) s^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} q_{\ell+m+n}(j,j) s^{\ell+m+n} \geq s^{\ell+m} q_\ell(j,k) q_m(k,j) Q_{kk}(s).$$

これからもし $j$ が過渡的なら

$$\lim_{s \uparrow 1} Q_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) < \infty$$

で, 上の不等式から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n(k,k) < \infty$ をえて, $k$ も過渡的となる. $j,k$ を入れ替えても同じである.

■

以上で, 定理 2.2 が証明できたことになる.

更に次の補題を示すことにより, その先に述べるような異なる場所での推移確率と再帰性の関係性も分る. (しかし, 次節では, そこまでの判定定理を用いる必要は無いので, 読み飛ばしても構わない.)

**補題 2.2** $j$ が再帰的のとき $j \to k$ [i.e., ${}^{\exists} n;\ q_n(j,k) > 0$] なら $P_k(T_j < \infty) = 1$.

**証明** まず, 任意の $i,j \in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$P_i(T_j < \infty) = q(i,j) + \sum_{k \in S; k \neq j} q(i,k) P_k(T_j < \infty).$$

(実際, マルコフ性と時間的一様性より [後, $P_i(A|\ B) = P(A|\ B \cap \{X_0 = i\})$ ($\to$ 確めよ.) も]
$P_i(T_j = n|\ X_1 = k) = P(T_j = n|\ X_0 = i, X_1 = k) = P(T_j = n|\ X_1 = k) = P_k(T_j = n-1)$ で, これから $P_i(X_1 = k, T_j = n) = q(i,k) P_k(T_j = n-1)$ をえて

$$P_i(T_j < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in S} P_i(X_1 = k, T_j = n) = P_i(X_1 = j) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \neq j} P_i(X_1 = k, T_j = n)$$

に代入することにより分かる.)
今, 仮定の $q_n(j,k) > 0$ より ${}^{\exists}(k_1, \ldots, k_{n-1});\ q(j,k_1) q(k_1,k_2) q(k_2,k_3) \cdots q(k_{n-1},k) > 0$ に注意して上で得た式で, $i = j$ とすると $j$ の再帰性より, ${}^{\forall} k; q(j,k) > 0$ に対し, $P_k(T_j < \infty) = 1$ が分かる. $k = k_1$ として, 再び上の式で $i = k_1$ として, $k = k_2$ に対し, $q(k_1,k_2) > 0$ より, $P_{k_2}(T_j < \infty) = 1$ が分かる. これを繰り返して, 題意を得る. ■

**問 2.4** 前の問 2.3 と上の補題から次が成り立つことを示せ:

$$j \text{ 再帰的, かつ } j \to k \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} q_n(k,j) = \infty.$$

**定理 2.3** 前の問 2.3, 2.4 で述べたことから既約なマルコフ連鎖に対しては
- 再帰的なら $^\forall j, k \in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k) = \infty$.
- 過渡的なら $^\forall j, k \in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k) < \infty$.

逆に, ある $j, k \in S$ に対し, $\sum_n q_n(j,k)$ が無限なら再帰的となり, 有限なら過渡的となる.

## 2.3 $d$ 次元ランダムウォーク

$S = \mathbf{Z}^d$ $(\ni j = (j_1, \dots, j_d))$ として, これを $d$ 次元**格子 (lattice)** という. また $\{p_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ が $p_k \geq 0$, $\sum p_k = 1$ をみたすとき $\mathbf{Z}^d$ 上の**分布 (distribution)** という.

**定義 2.1** $(X_n, P)$ が $d$ **次元ランダムウォーク (d-dim. random walk)** とは, $\{p_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ を $\mathbf{Z}^d$ 上の分布として, $\{X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots\}$ が独立で, $P(X_n - X_{n-1} = k) = p_k$ $(n \geq 1, k \in \mathbf{Z}^d)$ をみたすときをいう (**1 歩の分布** $\{p_k\}$ **をもつランダムウォーク**ともいう). 特に $|k| = 1$ なる $k \in \mathbf{Z}^d$ に対し, $p_k = 1/(2d)$ のとき**単純ランダムウォーク (simple random walk)** という. ここで $k = (k_1, \dots, k_d)$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$.

さらに $P_j(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) := P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n |\ X_0 = j)$ で $P_j$ を定義して $(X_n, P_j)$ を $j$ を出発する $d$ 次元ランダムウォークという.

**注意 2.1** 条件付確率 $P(A|\ B) := P(A \cap B)/P(B)$ は $P(B) > 0$ のとき定義されるので上の条件はそれも仮定に含まれているとみなす.

**問** 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が独立 $\iff$ $P(A|\ B) = P(A)$ を示せ. 但し, $P(B) > 0$ とする

明かに, $d$ 次元ランダムウォークはマルコフ連鎖である. しかもその推移確率 $Q = (q(j,k))$ は $q(j,k) = p_{k-j}$ で与えれる. また $d$ 次元単純ランダムウォークは既約である.

**問 2.5** このことを確かめよ. [マルコフ性, 時間的一様性, 推移確率, 既約性]

**問 2.5 改** $(X_n, P)$ を $d$ 次元ランダムウォークとする.

(1) $X_{n+1} - X_n$ と $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ が独立であることを示せ, i.e.,

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} - X_n = j, X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) \\ &= P(X_{n+1} - X_n = j) P(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n). \end{aligned}$$

特に $k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbf{Z}^d$ で和をとることにより, $X_{n+1} - X_n$ と $X_n$ が独立であることも分る.

(2) $P(X_{n+1} = j|\ X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = j|\ X_n = k_n) = p_{j-k_n}$ を示せ.
これから $\{X_n\}$ が時間的一様なマルコフ連鎖で, $q(j,k) = p_{k-j}$ も分る.

(3) 単純ランダムウォークは既約的であることを示せ. ($\|j - k\| := |j_1 - k_1| + \cdots + |j_d - k_d|$ を用いて $j \neq k, j = k$ で分けて考える.)

従って, この $Q = (q(j,k)) = (p_{k-j})$ を用いて, 再帰性, 過渡性について議論することができる.
まず、前節の結果を用いることにより, 単純ランダムウォークに関しては次のことが比較的容易に分る:

**定理 2.4** $d$ 次元単純ランダムウォークは

(1) $d = 1, 2$ なら再帰的 (i.e., $P_j(T_j < \infty) = 1$) であり,
(2) $d \geq 3$ なら過渡的である.

ここでは 3 次元以下について示す.
まず既約性により再帰的か過渡的のいずれかに分れるから, $q_n(0,0)$ の $n$ についての和の収束・発散を調べればよい. 奇数歩で出発点に戻ってくることは無いから, $q_{2n+1}(0,0) = 0$ で, 偶数歩の $q_{2n}(0,0)$ について考えればよい. そこで次を示す. (これにより再帰的か過渡的かは前節の定理 2.2 により判定できる.)

**命題 2.4** $d$ 次元単純ランダムウォークの推移確率 $Q = (q(j,k))$ に対して

(1) $d = 1, 2$ のとき $n \to \infty$ なら

$$q_{2n}(0,0) \sim \begin{cases} 1/\sqrt{\pi n} & (d = 1) \\ 1/(\pi n) & (d = 2) \end{cases}$$

ここで $a_n \sim b_n \ (n \to \infty) \overset{\text{def}}{\iff} a_n/b_n \to 1 \ (n \to \infty)$ である.
(2) $d = 3$ なら適当な正の数 $C$ に対して

$$q_{2n}(0,0) \leq Cn^{-3/2}.$$

**問 2.6** 一般に正の値をとる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 対して, $a_n \sim b_n \ (n \to \infty)$ なら $^\exists c_1, c_2 > 0; c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n$ $(^\forall n \geq 1)$ が成り立つこと示せ.

**注意 2.2** 実は, 一般に, 次の事実が知られている: ($d = 3$ なら定数は $\sqrt{(3/\pi)^3}/4$)

$$q_{2n}(0,0) \sim 2^{1-d} d^{d/2} (\pi n)^{-d/2} \quad (n \to \infty).$$

命題の証明で使う公式を述べておく.

**[スターリングの公式 (Stirling's formula)]** $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (n \to \infty).$

**命題 2.4 の証明**
$d = 1$ のときは次のことが容易に分るので, スターリングの公式より明らか:

$$q_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n \to \infty).$$

$d = 2$ のときは

$$q_{2n}(0,0) = \sum_{j,k \geq 0; j+k=n} \frac{(2n)!}{(j!k!)^2} 4^{-2n} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}^2 4^{-2n}$$

で, さらに $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ を用いれば 1 次元の結果から分る.

$d=3$ のときは

$$q_{2n}(0,0)=\sum_{j,k,m\ge 0;j+k+m=n}\frac{(2n)!}{(j!k!m!)^2}6^{-2n}$$

で, 3 項展開公式より

$$q_{2n}(0,0)\le c_n\frac{(2n)!}{n!}3^n6^{-2n}$$

をえる. ここで $c_n=\max_{j,k,m\ge 0;j+k+m=n}(j!k!m!)^{-1}$ である. さらにこの $c_n$ に対し, 次が成り立つことから, 再びスターリングの公式を用いれば題意をえる.

$$c_n\le c3^{n+3/2}n^{-n-3/2}e^n \quad (c>0 \text{ は } n\ge 1 \text{ に無関係な定数}). \tag{2.1}$$

実際, $n$ を 3 で割っていくつ余るかで場合分けして

$$c_n\le\begin{cases}(m!)^{-3} & (n=3m)\\ (m!)^{-2}((m+1)!)^{-1} & (n=3m+1)\\ (m!)^{-1}((m+1)!)^{-2} & (n=3m+2)\end{cases} \tag{2.2}$$

が分るので, スターリングの公式より, ある定数 $c_1,c_2>0$ が存在して

$$c_1n^{n+1/2}e^{-n}\le n!\le c_2n^{n+1/2}e^{-n}$$

をみたすので上に代入すればよい. ■

**問 2.7** 1 次元と 2 次元のときにスターリングの公式を用いて計算せよ.

**問 2.8** 上の式 (2.2) を示し, それを用いて (2.1) を導き, $d=3$ の証明 (計算) を確かめよ.

## 2.4 ゴルトン-ワトソン過程

Galton-Watson 過程とは, 前の例で述べたように家系の存続モデルである. 第 $n$ 世代の男子の数を $Z_n\in\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\dots\}$ で表す. 一般に対象を粒子と呼ぶことにして, $Z_0=1$ とする. 各粒子は独立に次世代に $Y$ 個の粒子を生じさせるとする. ここで $Y$ は $\mathbf{Z}_+$ に値をとる確率変数で分布 $(p_k)_{k\ge 0}$ をもつとする, i.e., $P(Y=k)=p_k$ $(k\ge 0)$. 勿論, 各粒子が新たに生む粒子の数は異なるので区別して, 第 $\ell$ 番目が $Y_\ell$ 個生むとする. 明らかに $\{Z_n\}$ はマルコフ過程となり, 推移確率は次で与えられる:

$$p(i,j)=P(Z_{n+1}=j|\ Z_n=i)=P(\sum_{\ell=1}^{i}Y_\ell=j)\quad (i\ge 1,j\ge 0).$$

ここで $\{Y_\ell\}$ は $Y$ と同じ分布 $(p_k)$ に従う独立な確率変数列である. また一旦 $Z_n=0$ となれば, そこで家系は失われるから

$$p(0,i)=0\ (i\ge 1),\quad p(0,0)=1$$

をみたす. 我々は子孫の分布 $(p_k)$ に対し, その平均が存在することを仮定する.

$$m:=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k\in(0,\infty):\qquad \text{平均出生数}.$$

今, $q$ を 1 粒子から出発した GW 過程が消滅する確率とすると, $Z_1 \overset{(\mathrm{d})}{=} Y$ で, $\{Z_1 = k\}$ で条件付けると

$$\begin{aligned}\text{消滅確率 } q &= P(\text{消滅} \mid Z_0 = 1) = P(^\exists n \geq 1; Z_n = 0 \mid Z_0 = 1) \\ &= \sum_{k \geq 0} P(\text{消滅} \mid Z_1 = k) P(Y = k) = \sum_{k \geq 0} q^k p_k.\end{aligned}$$

を得る. このとき $q = 1$ は常にこの方程式の解となるが, 他に $q \in [0, 1)$ となる解があり, それが消滅確率となるかも知れない. この問に答えるために次の母関数 $f$ を導入する.

$q$ **は方程式** $s = f(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ **の解となる**;

$$f(s) = E[s^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (|s| \leq 1).$$

この級数は $|s| \leq 1$ で絶対収束し, 従って $|s| < 1$ で無限回項別微分可能である. また

$$f(0) = p_0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = \sum_{k \geq 1} k p_k = m.$$

**定理 2.5** GW 過程 $\{Z_n\}$ は次をみたす: $P_1(\cdot) = P(\cdot \mid Z_0 = 1)$ と表すと,

$$\begin{aligned} m < 1 \text{ or } [m = 1, p_0 > 0] &\Longrightarrow P_1(^\forall n \geq 1, Z_n \geq 1) = 0, \quad \text{i.e., } q = 1 \\ m > 1 &\Longrightarrow P_1(^\forall n \geq 1, Z_n \geq 1) > 0, \quad \text{i.e., } q < 1 \end{aligned}$$

$m > 1$ のとき消滅確率 $q$ は方程式 $f(s) = s$ の $[0, 1)$ での一意解として与えられる.

$p_0 = 0$ なら確実に子孫を残すので消滅確率 $q = 0$ (このとき $m \geq 1$). 特に $p_1 = 1$ なら $m = 1$ で $q = 0$.

まずいくつか必要な命題を証明する. 母関数 $f$ は $0 \leq s \leq 1$ 上, $f(0) = p_0 \geq 0$ から単調増加に $f(1) = 1$ までの値をとるので, その合成を考えることができる. $f_1 = f$, $f_{n+1} = f \circ f_n$ $(n \geq 1)$ と定義する.

**命題 2.5** $n \geq 1$ に対し, $Z_0 = 1$ の条件のもと, $Z_n$ の母関数は $f_n$ となる, i.e., $E_1[s^{Z_n}] = f_n(s)$.

**証明** $P_1 = P, E_1 = E$ と書く. $g_n(s) = E[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_1(Z_n = k)$ とおく. $n = 1$ のとき $\{Z_0 = 1\}$ のもと $Z_1$ と $Y$ は同分布なので, 明らかに $g_1(s) = E[s^Y] = f(s)$. $n \geq 1$ に対し, $g_n = f_n$ と仮定する. $\{Z_n = k\}$ のもと $Z_{n+1}$ の分布は $\sum_{i=1}^{k} Y_i$ と同じで, $\{Y_i\}$ は独立で $Y$ と同分布であることから

$$E[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k] = E[\prod_{i=1}^{k} s^{Y_i} \mid Z_n = k] = \prod_{i=1}^{k} E[s^{Y_i}] = f(s)^k.$$

よって

$$g_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k] P(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(s)^k P(Z_n = k) = g_n(f(s)).$$

帰納法の仮定より, $g_{n+1}(s) = g_n(f(s)) = f_n(f(s)) = f_{n+1}(s)$. ■

**命題 2.6** $E_1[Z_n] = m^n$ $(n \geq 0)$.

**証明** $P_1 = P, E_1 = E$ と書く. $m = E[Y] = E[Z_1]$ と $E[Z_n \mid Z_{n-1} = k] = E[\sum_{i=1}^{k} Y_i] = km$ に注意して,

$$E[Z_n] = \sum_{k \geq 1} E[Z_n \mid Z_{n-1} = k] P(Z_{n-1} = k) = \sum_{k \geq 1} km P(Z_{n-1} = k) = m E[Z_{n-1}].$$

これを繰り返して $E[Z_n] = m^{n-1}E[Z_1] = m^n$ をえる. ■

**[定理 2.5 の証明]**

$P_1$ のもと $Z_n$ の母関数が $f_n$ であったことから, $P_1(Z_n = 0) = f_n(0)$ が成り立つ. $\{Z_n = 0\} \uparrow$ に注意すれば,

$$q = P_1(^\exists n \geq 1; Z_n = 0) = P_1(\bigcup_{n\geq 1}\{Z_n = 0\}) = \lim_{n\to\infty} f_n(0).$$

ここで $f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$ より, $n \to \infty$ とすれば, $f$ の連続性から, $q = f(q)$ をみたす.

**($m < 1$ の場合)** $P_1(Z_n \geq 1) \leq E_1[Z_n] = m^n$ より, $\{Z_n \geq 1\} \downarrow$ に注意して,

$$0 = \lim_{n\to\infty} P_1(Z_n \geq 1) = P_1(\bigcap_{n\geq 1}\{Z_n \geq 1\}) = P_1(^\forall n \geq 1, Z_n \geq 1) \quad \text{i.e., } q = 1.$$

**($m = 1$ の場合)** $p_0 > 0$ なら $p_0 + p_1 < 1$ (実際, もし $p_0 + p_1 = 1$ とすると $p_1 = 1 - p_0 < 1$ となり矛盾する). よって, $^\exists k \geq 2; p_k > 0$ に注意して,

$$f'(s) = \sum_{k\geq 1} kp_k s^{k-1} < f'(1) = \sum_{k\geq 1} kp_k = m = 1 \quad (0 < s < 1).$$

平均値の定理から $s \in (0,1)$ に対し, $^\exists c \in (s,1); f(1) - f(s) = f'(c)(1-s) < 1 - s$. $f(1) = 1$ より, 結局, $f(s) > s$ $(0 < s < 1)$ をえる. さらに $f(0) = p_0 > 0$ なので, $f(s) = s$ をみたす解は $[0,1]$ では $s = 1$ のみとなる. 故に $q = 1$.

**($m > 1$ の場合)** $p_0 + p_1 < 1$ に注意する (もし $p_0 + p_1 = 1$ なら $m = p_1 \leq 1$ より明らか). $f'(1) = m > 1$ で $f'$ の連続性から

$$^\exists \eta > 0; 1 - \eta < {^\forall s} < 1, 1 < f'(s) < f'(1) = m$$

(ここでは最後の不等式までは必要としないが, 理由は上と同様である). 従って $1 - \eta < s < 1$ なら $f(s) < s$. また $f(0) = p_0 \geq 0$ なので, $g(s) = f(s) - s$ に対し中間値の定理を用いることにより, $^\exists s_1 \in [0,1); f(s_1) = s_1$. この解の一意性を示す. もし $^\exists s_2 \in [0,1); s_1 < s_2, f(s_2) = s_2$ とすると, $g(s_i) = 0$ で, また $f(1) = 1$ より, $g(1) = 0$. ロルの定理より, $0 \leq s_1 < {^\exists \xi_1} < s_2 < {^\exists \xi_2} < 1; g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, i.e., $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$. 一方, $p_0 + p_1 < 1$ より,

$$s \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad f''(s) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0.$$

これから $f'(s)$ は $s \in (0,1)$ で狭義単調増加となるが, 上の $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$ に矛盾する. 故に $f(s) = s$ の解は $q = s_1$ or $q = 1$ のみとなる. さらに $q = 1$ とすると $1 = q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$ より, $n \gg 1$ (十分大) なら, $f_n(0) > 1 - \eta$. 上で示したことから $f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) < f_n(0)$ となり, $f_n$ が ($n$ に関して) 単調増加であることに反する. よって $q = s_1 \in [0,1)$. ■

**例 2.3** $p_0 = p_2 = 1/2$ のとき, 即ち, ある家系で, 男子を 2 人生むか, 生んでも女性ばかりという確率が半々のとき, 平均は $m = 1$ だが, この家系はいつかは絶滅してしまう.

**例 2.4** Lotka (1939) はアメリカの男性の子孫の分布が幾何分布であることを見い出した.

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = k) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \ (k \geq 1).$$

このとき

$$m = \frac{1}{5}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = \frac{5}{4} > 1.$$

を得て, 消滅確率 $q$ は

$$s = f(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} s^k, \quad 即ち, \quad \frac{3}{5}s^2 - \frac{11}{10}s + \frac{1}{2} = 0$$

の解で 1 より真に小さい正の数となる. これを解くと $s = 5/6, 1$ となり, $q = 5/6$ を得る. 従ってある家系が存続する確率は $1/6$ となる.

**問 2.9** 上の例で, 平均 $m = 5/4$ と方程式 $s = f(s)$ の解 $s = 5/6, 1$ を導く計算を確かめよ.

# 3 マルチンゲール (Martingales)

$\{M_n\}_{n\geq 1}$ を確率過程とする. 当然, 情報系 $(\mathcal{F}_n)$ があり, $\{M_n\}$ は $(\mathcal{F}_n)$-適合とする. (確率過程の中でも, マルチンゲールを表すときは, $\{M_n\}$ を用いる.)

・$\{M_n\}$ が**マルチンゲール**, より正確には, $(\mathcal{F}_n)$**-マルチンゲール (martingale)**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $M_n \in L^1$ かつ, $E[M_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = M_n$ a.s. $^\forall n \geq 1$.

$\Longleftrightarrow$ $M_n \in L^1$ かつ, $^\forall n \geq 0, ^\forall A \in \mathcal{F}_n, E[M_{n+1}; A] = E[M_n; A]$

ここで, 一般に, 確率変数 $X$ と部分 $\sigma$-field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対し, $E[X|\ \mathcal{G}]$ は確率変数 $X$ の $\mathcal{G}$ の下での, 条件付平均値と呼ばれるもので, ラドン-ニコディムの定理を用いて定義される.

そこで, 確率論において必要となる解析学の結果として, その定理と一様可積分性という概念と, それらに関連する結果を先に述べておこう. これにより, ルベーグの収束定理を含む, より精密な結果を与えることができる.

## 3.1 ラドン-ニコディムの定理と条件付平均値

一般に, 有限測度 $\mu$ on $(\Omega, \mathcal{G})$ に対し, 非負で可積分な $\mathcal{G}$ 可測関数 $f$; $f \geq 0$, $\mu$-a.e., $f \in L^1$ に対し, $d\nu = f d\mu$, i.e., $\nu(A) = \int_A f d\mu$ $(A \in \mathcal{F})$ とおけば, 積分の性質より, 明らかに $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$ を満たす. これを $\nu \ll \mu$ と表し, $\nu$ は $\mu$ に対し, **絶対連続 (absolute conti.)** であるという. また, $f$ を $\nu$ の ($\mu$ に対する) **密度関数 (density ft)** と呼ぶ.

この逆も成り立つというのが, ラドン-ニコディムの定理である.

**定理 3.1 (Radon-Nikodym の定理)** 可測空間 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の 2 つの有限測度 $\mu, \nu$ に対し, $\nu \ll \mu$ なら, $^{\exists_1} f$; $f \geq 0$. $\mu$-a.e., $f \in L^1(d\mu)$; $d\nu = f d\mu$, i.e., $\nu(A) = \int_A f d\mu$ $(A \in \mathcal{G})$. ここでの一意性は, $\mu$-a.e. の意味である. 即ち, $\widetilde{f}$ も同じ条件を満たせば, $f = \widetilde{f}$, $\mu$-a.e. となる.

簡単に言うと, 『絶対連側ならば, 密度関数を一意的に持つ』ということである.

2 つの有限測度の差で表されるものを, **有限符号付測度 (signed finite measure)** と呼ぶ. 上の定理は, $\nu$ を有限符号付測度に変えても, 成り立つ. (勿論, このとき, $f \geq 0$, $\mu$-a.e. という条件は無くなる.)

証明は, $f$ の構成だけ述べておく. $h \in \mathbf{H} \overset{\text{def}}{\iff} \int_A h d\mu \le \nu(A)$ ($^\forall A \in \mathcal{G}$). とおく. (定数関数 0 が条件を満たすので $\mathbf{H} \neq \emptyset$.) このとき,

$$^\exists h_n \in \mathbf{H}; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n d\mu = \sup_{h\in\mathbf{H}} \int_\Omega h d\mu.$$

ととれるので, $f_n := \max_{k\le n} h_k$ とおけば, $f_n \in \mathbf{H}$ が示せるので, $f := \lim f_n$ とおけば, $f \in \mathbf{H}$ となり, $\int_\Omega f d\mu = \sup_{h\in\mathbf{H}} \int_\Omega h d\mu$ を満たす. これが求めるものとなるのだが, その証明には, Hahn 分解を用いる等の更なる結果を必要とするので, 詳細はここでは, 省く.

これを用いて, 条件付平均値を定義しよう.

確率変数 $X$ と部分 $\sigma$-field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対し, **$X$ の $\mathcal{G}$ の下での, 条件付平均値** $Y(\omega) = E[X|\ \mathcal{G}](\omega)$ は, $Y$ は $\mathcal{G}$ 可測で, $^\forall A \in \mathcal{G}, E[Y;A] = E[X;A]$ を満たすものとして定義する.

これから, $E[E[X|\ \mathcal{G}];A] = E[X;A]$ ($^\forall A \in \mathcal{G}$) が成り立つ.

まず, $Q(A) := E[X;A]$ ($A \in \mathcal{G}$) と定義すると, これは $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の有限符号付測度である. 明らかに, $P(A) = 0$ なら $Q(A) = 0$, i.e., $Q \ll P$; $Q$ は $P$ に対し, 絶対連続. よって Radon-Nikodym の定理より, $^{\exists_1} Y = Y(\omega)$; $\mathcal{G}$ 可測, $Q(A) = \int_A Y dP = E[Y;A]$, i.e., $E[X;A] = E[Y;A]$ ($A \in \mathcal{G}$). しかも, $P$-a.s. で一意. この $Y$ を $Y(\omega) = E[X|\ \mathcal{G}](\omega)$ と表すということである.

条件付平均値の定義は非常に, 理解しにくいと思うが, $\sigma$-加法族を情報の集まりだと思えば, 少ない情報で決まり, その各情報での平均が元のと一致する確率変数を表している.

**[条件付平均値の性質]**

**命題 3.1** $X, X_n$ を $\mathcal{F}$ 可測で可積分な確率変数, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 $\sigma$-加法族とする. 次が成り立つ.

(1) $X$ が $\mathcal{G}$ 可測なら, $E[X|\ \mathcal{G}] = X$ a.s.

(2) $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ に対し, $E[a_1X_1 + a_2X_2|\ \mathcal{G}] = a_1E[X_1|\ \mathcal{G}] + a_2E[X_2|\ \mathcal{G}]$ a.s.

(3) $X_1 \le X_2$ a.s. なら, $E[X_1|\ \mathcal{G}] \le E[X_2|\ \mathcal{G}]$ a.s.

(4) $|E[X|\ \mathcal{G}]| \le E[|X||\ \mathcal{G}]$ a.s.

(5) $Y$ が $\mathcal{G}$ 可測で, $XY, X \in L^1$ なら, $E[XY|\ \mathcal{G}] = YE[X|\ \mathcal{G}]$ a.s.

(6) $0 \le X_n \uparrow X$ a.s. なら $0 \le E[X_n|\ \mathcal{G}] \uparrow E[X|\ \mathcal{G}]$ a.s.

(7) $1 \le p, q \le \infty; 1/p + 1/q = 1$ に対し, $X \in L^p, Y \in L^q$ なら,

$$E[XY|\ \mathcal{G}] \le E[|X|^p|\ \mathcal{G}]^{1/p} E[|Y|^q|\ \mathcal{G}]^{1/q} \quad \text{a.s. if } 1 < p, q < \infty.$$

$p = 1, q = \infty$ の時は, $E[XY|\ \mathcal{G}] \le E[|X||\ \mathcal{G}]\|Y\|_\infty$ で, 逆も同様.

特に, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ で, $X \in L^{p_2}$ なら, $E[|X|^{p_1}|\ \mathcal{G}]^{1/p_1} \le E[|X|^{p_2}|\ \mathcal{G}]^{1/p_2}$ a.s.

(8) $1 \le p \le \infty$ とする. $X_n \to X$ in $L^p$ なら, $E[X_n|\ \mathcal{G}] \to E[X|\ \mathcal{G}]$ in $L^p$.

(9) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ 共に部分 $\sigma$-加法族なら, $E[E[X|\ \mathcal{G}_2]|\ \mathcal{G}_1] = E[X|\ \mathcal{G}_1]$ a.s.

(10) **(Jensen の不等式)** $X \in L^1$, $\varphi$ が $\mathbf{R}$ 上の凸関数なら, $\varphi(E[X|\ \mathcal{G}]) \le E[\varphi(X)|\ \mathcal{G}]$ a.s.

**[証明]** 以下, $^\forall A \in \mathcal{G}$ とする. (1) $E[X;A] = E[X;A]$ を満たし, $X$ が $\mathcal{G}$-可測なので明らか.

(2) $Y_1 = E[X_1|\,\mathcal{G}]$, $Y_2 = E[X_2|\,\mathcal{G}]$, $Y = E[a_1X_1 + a_2X_2|\,\mathcal{G}]$ とおくと, $E[X_1; A] = E[Y_1; A]$, $E[X_2; A] = E[Y_2; A]$. $E[a_1X_1 + a_2X_2; A] = E[Y; A]$ なので, $E[Y; A] = a_1E[X_1; A] + a_2E[X_2; A] = a_1E[Y_1; A] + a_2E[Y_2; A] = E[a_1Y_1 + a_2Y_2; A]$ となり, $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2$ a.s. をえる.

(3) $E[E[X_1|\,\mathcal{G}]; A] = E[X_1; A] \le E[X_2; A] = E[E[X_2|\,\mathcal{G}]; A]$ で, どちらも $\mathcal{G}$-可測で, $A \in \mathcal{G}$ が任意なので題意を得る. ($\to$ 次の問.)

(4) $-|X| \le X \le |X|$ と直前の結果から, 次を得る. $-E[|X||\,\mathcal{G}] \le E[X|\,\mathcal{G}] \le E[|X||\,\mathcal{G}]$ a.s.

(5) $Y = 1_B$ $(B \in \mathcal{G})$ のとき示せば十分で, $E[XY; A] = E[X; A \cap B] = E[E[X|\,\mathcal{G}]; A \cap B] = E[1_B E[X|\,\mathcal{G}]; A]$ より, 明らか.

(6) (3) より, 非負性と単調性は明らか. $\lim E[X_n|\,\mathcal{G}] = E[X|\,\mathcal{G}]$ a.s. を示せば良い. MCT より, $E[\lim E[X_n|\,\mathcal{G}]; A] = \lim E[E[X_n|\,\mathcal{G}]; A] = \lim E[X_n; A] = E[\lim X_n; A] = E[X; A] = E[E[X|\,\mathcal{G}; A]$ となり, 両辺の中身が $\mathcal{G}$ 可測で $A \in \mathcal{G}$ の任意性より明らか.

(7) 条件付平均が, 普通の平均と同じように, 線形性と単調性をもつことと絶対値の不等式を満たすことから, Hölder の不等式の証明を全く同様になぞれるので, 示せる.

(8) Hölder より, 次が成り立つので明らか. $E\,|E[X_n|\,\mathcal{G}] - E[X|\,\mathcal{G}]|^p \le E\,[E[|X_n - X|^p|\,\mathcal{G}]] = E|X_n - X|^p$

(9) ${}^\forall A \in \mathcal{G}_1$ に対し, $E[E[X|\,\mathcal{G}_2]; A] = E[X; A]$ を示せば良いが, $A \in \mathcal{G}_2$ でもあるので, 明らか.

(10) 凸関数がそれ以下の 1 次関数の上限として与えられるので, $\varphi(x) \ge ax + b = \psi(x)$ として, $E[\varphi(X)|\,\mathcal{G}] \ge E[aX + b|\,\mathcal{G}] = aE[X|\,\mathcal{G}] + b = \psi(E[X|\,\mathcal{G}])$ 最後の式で, $\psi$ $(\le \varphi)$ で上限をとれば良い. ■

**問 3.1** $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ で, $X, Y$ 共に $\mathcal{G}$-可測, かつ, 可積分の時, ${}^\forall A \in \mathcal{G}$, $E[X; A] \le E[Y; A]$ なら, $X \le Y$ a.s. を示せ.

**[解]** $Y - X$ を考えることにより, $X = 0$ の時に示せば十分. 即ち, ${}^\forall A \in \mathcal{G}$, $E[Y; A] \ge 0$ なら, $Y \ge 0$ a.s. を示せばよい. $A = A_n := \{Y \le -1/n\}$ とすれば, $0 \le E[Y; A_n] \le -(1/n)P(A_n)$ となり, $P(A_n) = 0$. よって, $P(Y < 0) = P(\bigcup A_n) \le \sum P(A_n) = 0$. ■

上で確率変数が $\mathcal{G}$-可測ならば, その条件付きをすり抜けることを示したが ((1) と (5)), では独立ならばどうなるだろうか？答えは, 次のように条件だけが消えるのである.

**命題 3.2** $X \in L^1$ が $\mathcal{G}$ と独立なら, $E[X|\,\mathcal{G}] = EX$ a.s. 更に, $X \in \mathcal{G}$ でもあれば, $X = EX$ (定数) a.s. となる. 即ち, $\mathcal{G}$-可測で, それと独立なものは確率 1 で定数しかない. ちなみに, $X$ が $\mathcal{G}$ と独立 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P(\{X \le a\} \cap A) = P(X \le a)P(A)$ $({}^\forall a \in \mathbf{R}, A \in \mathcal{G})$

**[証明]** まず, 独立性から ${}^\forall A \in \mathcal{G}$ に対し, $E[X1_A] = EXE[1_A] = EXP(A)$ が成り立つ. (実際, 平均の定義の仕方に戻って, $X^\pm$ を単関数近似すれば明らか.) しかも, この式は, 主張そのものを表している. ■

## 3.2 一様可積分性

前半の一様可積分性に関する議論は, $P$ が有限測度であれば成り立つが本質的に同じなので, 確率空間のままで議論する.

・可測関数列 $\{X_n\}$ が**一様可積分 (uniform integrable)** (簡単に, $\{X_n\}$ **が UI** という.)

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{a\to\infty}\sup_{n\geq 1} E[|X_n|;|X_n|\geq a]=0$
$\Longleftrightarrow$ (U1) $\sup_n E|X_n|<\infty$, [**絶対平均有界性**]
(U2) $P(A)\to 0$ ならば, $\sup_n E[|X_n|;A]\to 0$ [**積分の一様絶対連続性**], i.e.,
${}^{\forall}\varepsilon>0, {}^{\exists}\delta>0; {}^{\forall}A\in\mathcal{F}; P(A)<\delta, E[|X_n|;A]<\varepsilon$.

**[証明]** ($\Rightarrow$) (U1) は次の不等式から明らか. ($P(\Omega)$ の有限性が必要)

$$E|X_n| = E[|X_n|;|X_n|\geq a]+E[|X_n|;|X_n|<a]\leq \sup_n E[|X_n|;|X_n|\geq a]+aP(\Omega).$$

(U2) も次より, すぐ分かる.

$$E[|X_n|;A]=E[|X_n|;A\cap\{|X_n|\geq a\}]+E[|X_n|;A\cap\{|X_n|<a\}]\leq E[|X_n|;|X_n|\geq a]+aP(A).$$

最後の第 1 項を $\varepsilon/2$ で抑えるような十分大の $a>0$ を固定して, $\delta=\varepsilon/(2a)$ ととれば良い.

($\Leftarrow$) $P(|X_n|\geq a)\leq E|X_n|/a$ で, (U1) から $a\to\infty$ のとき, この確率が一様に 0 に行くので, (U2) から成り立つことがすぐ分かる. ■

次の命題はすぐに分る.

**命題 3.3** (1) ${}^{\exists}Y\in L^1; |X_n|\leq Y$, a.s. なら, $\{X_n\}$ は UI, i.e., 可積分関数で抑えられる確率変数列は一様可積分.

(2) ${}^{\exists}p>1, \sup_n E[|X_n|^p]<\infty$ なら $\{X_n\}$ は UI.

(3) $X_n\to X$, a.s. で, $\{X_n\}$: UI なら, $X\in L^1$.

(4) $\{X_n\}$: UI, $Y\in L^1$ なら $\{X_n+Y\}$ も UI, i.e., UI に可積分関数を加えても UI.

(5) $\{X_n\},\{Y_n\}$: UI なら $\{Z_n=X_n+Y_n\}$ もそう, i.e., UI 同士の和も UI.

**[証明]** (1) a.s. が無いときに示せば十分で, そのとき, $\{|X_n|\geq a\}\subset\{Y\geq a\}$ なので, $E[|X_n|;|X_n|\geq a]\leq E[Y;Y\geq a]$. $Y$ が可積分で, 積分の絶対連続性から, 明らか.

(2) $K:=\sup_n E[|X_n|^p]$ $(<\infty)$ とおく. チェビシェフより, $P(|X_n|\geq a)\leq K/a^p$ で, Hölder より, $1/q=1-1/p$ に注意して, $E[|X_n|;|X_n|\geq a]\leq E[|X_n|^p]^{1/p}E[1_{\{|X_n|\geq a\}}]^{1/q}\leq K^{1/p}P(|X_n|\geq a)^{1/q}\leq K/a^{p/q}=K/a^{p-1}\to 0$ $(a\to\infty)$.

(3) Fatou's Lem. と平均有界性より, 明らか.

(4), (5) は (U1),(U2) をチェックすれば明らか. ■

さて, 一様可積分性において, 重要な結果は次の収束定理である.

**定理 3.2** $X_n\to X$, a.s., かつ, $\{X_n\}$ が UI なら, $X_n\to X$ in $L^1$, i.e., $E|X_n-X|\to 0$.

これは次の結果の系として与えられる.

**定理 3.3** $X_n\in L^1$, $X_n\to X$, a.s. とする. 次は同値
(1) $\{X_n\}$: UI, (2) $X_n\to X$ in $L^1$, i.e., $E|X_n-X|\to 0$, (3) $E|X_n|\to E|X|<\infty$.

$\{X_n\}$ が可積分関数で抑えられれば, UI なので, 上の結果から, ルベーグの収束定理より, さらに一般的な収束定理がえられたことになる.

**[証明]**

(1) ⇒ (2) $\{X_n\}$ が UI なので, 仮定の $X_n \to X$ a.s. と上の命題より, $X \in L^1$ であることに注意. 従って, 再び命題により, $\{X_n - X\}$ も UI. また, $X_n \to X$, a.s. より, in pr. でも成り立つので, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$.

$$E|X_n - X| \leq E[|X_n - X|; |X_n - X| \geq \varepsilon] + \varepsilon P(|X_n - X| < \varepsilon) \leq E[|X_n - X|; |X_n - X| \geq \varepsilon] + \varepsilon$$

よって, 先に $n \to \infty$ とすれば, $\{X_n - X\}$: UI より, 一様絶対連続性をもつので, 第 1 項は 0 となり, 更に, $\varepsilon > 0$ の任意性から, $\lim E|X_n - X| = 0$ をえる.

(2) ⇒ (3) は明らか. $(|E|X_n| - E|X|| \leq E|X_n - X|$ より. ちなみに, $E|X| \leq E|X - X_n| + E|X_n| < \infty$ で, $X \in L^1$.)

(3) ⇒ (1) まず方針は, $|X|$ の分布関数の任意の連続点 $a > 0$ に対し, $E[|X_n|; |X_n| \geq a] \to E[|X|; |X| \geq a]$ $(n \to \infty)$ が示せる. これが分れば, $X$ の積分の絶対連続性と合わせて, $\sup_n E[|X_n|; |X_n| \geq b] \to 0$ $(b \to \infty)$ がいえる. これらを順に示す.

$^\forall a > 0$ に対し, $X^a = X1_{\{|X|<a\}}$ とおく. (これを cut function という.) $|X^a| \leq a$ で, $|X(\omega)| \neq a$ なら, $X_n^a(\omega) \to X^a(\omega)$ $(n \to \infty)$ となる (→ 示せ). 従って, $|X|$ の分布関数の連続点 $a > 0$, i.e., $P(|X| = a) = 0$ に対し, $X_n^a \to X^a$, a.s. $|X_n^a| \leq a$ なので, 有界収束定理により, $E|X_n^a| \to E|X^a|$. よって, (3) の仮定から,

$$E[|X_n|; |X_n| \geq a] = E|X_n| - E|X_n^a| \to E|X| - E|X^a| = E[|X|; |X| \geq a].$$

更に, $X$ の積分の絶対連続性から, $^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a > 0$; 十分大に対し, $= E[|X|; |X| \geq a] < \varepsilon/2$ で, 更に, この $a$ を $|X|$ の分布関数の連続点としてとれるので, $^\exists N; ^\forall n \geq N, E[|X_n|; |X_n| \geq a] < \varepsilon$. また, $n < N$ に対しても, 積分の絶対連続性から, $^\exists b_k, k = 1, 2, \ldots, N; E[|X_k|; |X_k| \geq b_k] < \varepsilon$ とできるので, $^\forall b \geq \max\{a, b_1, \cdots, b_N\}, \sup_n E[|X_n|; |X_n| \geq b] \leq \varepsilon$ となり, 求める結果を得る. ■

**問**　上で, $X_n(\omega) \to X(\omega), |X(\omega)| \neq a$ なら, $X_n^a(\omega) \to X^a(\omega)$ $(n \to \infty)$ を示し, $|X(\omega)| = a$ のときに成り立たない例を考えよ.

(まず, $0 \leq X(\omega) < a$ として考えれば良い. 例は, $X(\omega) = a$ なら, $X_n(\omega) = a - 1/n$.)

**問 3.2** 概収束していて, 尚且つ, 平均が収束しても, 一様可積分とはならない例を挙げよ.

$(0,1)$ の Lebesgue 確率空間上で, $X_n$ を, $(0, 1/n)$ で $n$, $(1 - 1/n, 1)$ で $-n$, 他で 0 とすれば, $X_n \to 0$, $EX_n = 0$ であるが, $n \geq a > 0$ なら, $E[|X_n|; |X_n| \geq a] = E|X_n| = 2$ となり, 一様可積分ではない.

## 3.3　マルチンゲールの定義と性質、ドゥーブ分解

$(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ が**マルチンゲール (martingale)** であるとは, $\mathcal{F}_n \uparrow\subset \mathcal{F}$ 増大部分 $\sigma$-加法族で, $M_n$ は $\mathcal{F}_n$ 可測で可積分な確率変数で, 次を満たす. $E[M_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = M_n$ a.s. $^\forall n \geq 1$, i.e., $^\forall n \geq 1, ^\forall A \in \mathcal{F}_n, E[M_{n+1}; A] = E[M_n; A]$.

また, $E[M_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] \geq M_n$ a.s. $^\forall n \geq 1$ のとき, **劣マルチンゲール (sub-martingale)** といい, 不等号が逆の時は, **優マルチンゲール (super-martingale)** という.

明らかに, マルチンゲールなら平均は一定, i.e., $^\forall n \geq 1, EM_n = EM_1$. 劣マルチンゲールなら, 平均増加, i.e., $EM_n \uparrow$.

$n \geq 0$ でも同様で, $M_1$ を $M_0$ に変えれば良い.

・独立確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ に対し, $M_n = \sum_{k\leq n} X_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ とおいたとき, $EX_n = 0$ $(n \geq 1)$ ならば, $(M_n, \mathcal{F}_n)$ はマルチンゲールとなる. ($EX_n \geq 0$ $(n \geq 1)$ なら, 劣マルチンゲールとなる.)

・可積分な確率変数 $X$ と情報系 $\{\mathcal{F}_n\}$ に対し, $M_n := E[X|\ \mathcal{F}_n]$ とおけば, これもマルチンゲールとなる.

**問 3.3** 上の 2 つのことを確かめよ.

以下では, 情報系 $(\mathcal{F}_n)$ は既に与えられているものとして, 省略する.

**命題 3.4** (1) $\{M_n\}$ がマルチンゲールで, $\varphi$ が $\mathbf{R}$ 上の凸関数で, $\varphi(M_n) \in L^1$ $({}^\forall n \geq 1)$ ならば, $\{\varphi(M_n)\}$ は劣マルチンゲールとなる.

(2) $\{X_n\}$ が劣マルチンゲール, $\varphi$ が $\mathbf{R}$ 上の凸関数で増加, かつ, $\varphi(X_n) \in L^1$ $({}^\forall n \geq 1)$ ならば, $\{\varphi(X_n)\}$ も劣マルチンゲールとなる.

(3) 各 $k \geq 1$ に対し, $\{X_n^{(k)}\}$ が劣マルチンゲールとする. $K < \infty$ を固定すると, $M_n^{(K)} := \max_{k\leq K} X_n^{(k)}$ も劣マルチンゲール.

[証明] (1) 条件付平均値に対する Jensen の不等式より,

$$E[\varphi(M_{n+1})|\ \mathcal{F}_n] \geq \varphi(E[M_{n+1}|\ \mathcal{F}_n]) = \varphi(M_n) \quad \text{a.s.}$$

(2) 上の式の最後の等号が, 増加性により, 不等号 「$\geq$」となるので成り立つ.

(3) 2 個で示せば十分で, $Z_n := X_n \vee Y_n$ とおく. $E|Z_n| \leq E|X_n| + E|Y_n| < \infty$ で, しかも

$$X_n \leq E[X_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] \leq E[Z_{n+1}|\ \mathcal{F}_n], \quad Y_n \leq E[Y_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] \leq E[Z_{n+1}|\ \mathcal{F}_n]$$

より, 求める結果を得る. ■

**定理 3.4 (Doob の分解定理)** $(X_n)$ が劣マルチンゲールなら, ${}^{\exists_1}(M_n), (A_n)$; $X_n = M_n + A_n$. $(M_n)$ はマルチンゲール, $(A_n)$ は 0 を出発する可予測増加過程, i.e., $0 = A_1 \leq A_n \uparrow$ a.s., $A_n$ は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測 (このとき **可予測 (predictable)** という.)

[証明] $X_n$ を次のように分解し, $\{\cdot\}$ 部を $M_n$, 残りを $A_n$ とおけば良い.

$$X_n = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1} - X_k) = \left\{X_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1} - E[X_{k+1}|\ \mathcal{F}_k])\right\} + \sum_{k=1}^{n-1}(E[X_{k+1}|\ \mathcal{F}_k] - X_k)$$

一意性は, $X_n = M_n + A_n = \widetilde{M}_n + \widetilde{A}_n$ と分解されたとすると, $M_n - \widetilde{M}_n = \widetilde{A}_n - A_n$. これはマルチンゲールで, 可予測, i.e., $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測. 従って, $n \geq 1$ に対し,

$$\widetilde{A}_{n+1} - A_{n+1} = E[M_{n+1} - \widetilde{M}_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = M_n - \widetilde{M}_n = \widetilde{A}_n - A_n. \text{ a.s.}$$

よって, $\widetilde{A}_n - A_n = \widetilde{A}_0 - A_0 = 0$. a.s. ■

## 3.4 停止時刻と任意抽出定理

$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ を情報系とする. 即ち, $\mathcal{F}_n$ は $\mathcal{F}$ の増加する部分 $\sigma$-field.

また $\{X_n\}_{\geq 0}$ を確率過程とすると, $(\mathcal{F}_n)$ 適合性から, $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}_n$ $({}^\forall n \geq 0)$ を満たすことに注意.

$\overline{\mathbf{Z}}_+ = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ に値をとる確率変数 $\tau = \tau(\omega)$ が**停止時刻 (ST; Stopping Time)**
$\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall n \geq 0, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n. \iff {}^\forall n \geq 0, \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$

**問 3.4** 次も停止時刻となることを示せ.
(1) $\tau \equiv n$ (定数時刻)
(2) $\sigma, \tau$ が ST なら $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ もそう.
(3) 実数値確率過程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ と $B \in \mathcal{B}^1$ に対し, $B$ への **到達時刻 (hitting time)**

$$\tau_B := \inf\{n \geq 0; X_n \in B\} \quad (= \infty \text{ if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

但し, 出発点 $X_0$ を除いて考えるときには, 上の定義で $n \geq 1$ とすることもある.

**注)** 上の (3) の設定において, 脱出時刻 (exit time) $\sigma_B = \sup\{n \geq 0; X_n \in B\}$ $(= 0 \text{ if } \{\cdot\} = \emptyset)$ は一般には, 停止時刻とはならない. ($\to$ 何故か説明せよ.)

以下では,
**[仮定]** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備であるとして, さらに $\mathcal{F}_0$ は零集合を全て含むとする.
停止時刻 $\tau$ に対し,

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}; {}^\forall n \geq 0, A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

上で, $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ を $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ に換えても同値である.

**問 3.5** (1) 上の $\mathcal{F}_\tau$ は $\sigma$-field で, $\tau$ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測であることを示せ.
(2) 停止時刻 $\sigma, \tau$ に対し, $\sigma \leq \tau$ a.s. なら $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(2) で a.s. があるため, 零集合を含むという条件が必要. $A \cap \{\tau \leq n\} = (A \cap \{\sigma \leq n\}) \cap \{\tau \leq n\}$ が零集合 $\{\sigma > \tau\}$ の違いを除いて成り立つため.

マルチンゲールは公平なゲームであるが, これをランダムな停止時刻で止めるとどうなるだろうか？公平性は変わらないと思えるだろうが, それを保証するのが次の定理で, 停止時刻の有界性が必要となる.

**定理 3.5 (任意抽出定理 (optional sampling th.))** $\{X_n\}$ を劣マルチンゲールとする. 停止時刻 $\sigma, \tau$ が a.s. で有界で, $\sigma \leq \tau$ a.s. なら, $E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$ a.s.

(優・劣) マルチンゲール性は, 有界な停止時刻で, 置き換えても保たれる.

この有界性は落とすことが出来ない. 実際, 0 を出発する 1 次元単純ランダムウォーク $\{X_n\}$ はマルチンゲールで, $a \leq -1$ に対し, $\sigma = 0$, $\tau = \inf\{n \geq 0; X_n \geq a\}$ とおくと, $\sigma \leq \tau$ を満たす停止時刻だが, $\tau$ は有界ではない. このとき, $EX_\sigma = EX_0 = 0$, $EX_\tau = a < 0$ となり, 一致しない.

**問 3.6** 定理の $X_\tau$ が $\mathcal{F}_\tau$ 可測, かつ, 可積分であることを示せ.

$\sigma \leq \tau \leq {}^\exists N$ a.s. として良い $X_\tau = \sum_{n \leq N} X_n 1_{\{\tau = n\}}$ より, 可積分性は明らかで, 更に, $\{X_n \leq a\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ より, 可測性も明らか.

**[任意抽出定理の証明]** $\sigma \le \tau \le {}^\exists N$ a.s. として良い. ${}^\forall A \in \mathcal{F}_\sigma, E[X_\tau; A] \ge E[X_\sigma; A]$ を示せば良い. $0 \le n \le N$ として, $A_n := A \cap \{\sigma = n\}$ とおくと $A_n \in \mathcal{F}_n$. まず, $n \le k \le N$ に対し, $A_n \cap \{\tau \ge k+1\} = A_n \cap \{\tau \le k\}^c = A_n \setminus (A_n \cap \{\tau \le k\}) \in \mathcal{F}_k$ に注意して, 劣マルチンゲール性より,

$$\begin{aligned} E[X_k; A_n \cap \{\tau \ge k\}] &= E[X_k; A_n \cap \{\tau = k\}] + E[X_k; A_n \cap \{\tau \ge k+1\}] \\ &\le E[X_\tau; A_n \cap \{\tau = k\}] + E[X_{k+1}; A_n \cap \{\tau \ge k+1\}]. \end{aligned}$$

同じ計算を第 2 項に, 順次施して,

$$\le \sum_{j=k}^{N} E[X_\tau; A_n \cap \{\tau = j\}] = E[X_\tau; A_n \cap \{\tau \ge k\}].$$

$k = n$ とすれば, $\sigma \le \tau$ a.s. より, 零集合の違いを除いて, $A_n = A \cap \{n = \sigma \le \tau\} = A_n \cap \{\tau \ge n\}$ なので, $E[X_\sigma; A_n] = E[X_n; A_n] \le E[X_\tau; A_n]$. よって $0 \le n \le N$ で和をとれば, $E[X_\sigma; A] \le E[X_\tau; A]$. ■

**系 3.1 (任意停止定理 (Optional stopping th.))** $(X_n, \mathcal{F}_n)$ を劣マルチンゲール, $\tau$ を停止時刻とすると, $(X_n^\tau, \mathcal{F}_n^\tau) := (X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_{n\wedge\tau})$ も劣マルチンゲールである.

$n \wedge \tau$ も ST で, $m < n$ なら $m \wedge \tau \le n \wedge \tau \le n$ となり有界なので, 抽出定理より明らか. ■

## 3.5 劣マルチンゲール不等式と収束定理

大数の強法則で用いた, 独立確率変数の和に対する Kolmogorov の最大不等式は, マルチンゲールに対して, 次のように一般化される.

**定理 3.6 (劣マルチンゲール不等式)** (1) $(X_n)$ を劣マルチンゲールとする.

$${}^\forall a > 0, aP(\max_{k\le n} X_k \ge a) \le E[X_n; \max_{k \le n} X_k \ge a] \le EX_n^+.$$

(2) 特に, $(X_n)$ が劣マルチンゲールで, 非負 $X_n \ge 0$ a.s. なら, $aP(\max_{k\le n} X_k \ge a) \le EX_n$ (${}^\forall a > 0$). 更に, ある $p > 1$ に対し, $X \in L^p$ なら,

$$\left[E \max_{k \le n} X_k^p\right]^{1/p} \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p.$$

$\{M_n\}$ がマルチンゲールならば, $\{|M_n|\}$ が劣マルチンゲールなので, 実用上, 良く用いられるのは次の結果である.

**系 3.2** $(M_n)$ がマルチンゲールなら, $aP(\max_{k\le n} |M_k| \ge a) \le E|M_n|$ (${}^\forall a > 0$).
更に, $M \in L^p$ (${}^\exists p > 1$) なら,

$$\left[E \max_{k \le n} |M_k|^p\right]^{1/p} \le \frac{p}{p-1} \|M_n\|_p.$$

更に, 次も成り立つ.

**系 3.3** $n \ge 0$ とする. $(X_n)$ が劣マルチンゲールなら,

$${}^\forall a > 0, aP(\min_{k\le n} X_k \le -a) \le EX_n - E[X_n; \min_{k \le n} X_k \le -a] - EX_0 \le EX_n^+ - EX_0.$$

但し, $n \ge 1$ なら, $X_0$ は $X_1$ と変えれば良い.

**[劣マルチンゲール不等式の証明]** (1) 劣マルチンゲール $(X_n)$ と $^\forall a > 0$ に対し, 事象 $A = \{\max_{k \le n} X_k \ge a\}$ を $X_k$ が初めて, $a$ 以上となる時間で分割する. 即ち,

$$A_0 = \{X_0 \ge a\}, \quad A_k = \{X_k \ge a, {}^\forall j \le k-1, X_j < a\}$$

とおくと, $A = \bigcup_{k \le n} A_k$; 素和, $A_k \in \mathcal{F}_k$ となる.

$$E[X_n; A] = \sum_{k \le n} E[X_n; A_k] \ge \sum_{k \le n} E[X_k; A_k] \ge a \sum_{k \le n} P(A_k) = aP(A).$$

(2) 後半について.

$$p \int_0^\infty a^{p-1} 1_{\{a \le Y\}} da = p \int_0^Y a^{p-1} da = Y^p$$

を用いる. $Y = \max_{k \le n} |X_k|$ とすると, 上式とマルチンゲール不等式により,

$$\begin{aligned} EY^p &= p \int_0^\infty a^{p-1} P(Y \ge a) da \le p \int_0^\infty a^{p-1} \frac{1}{a} E[|X_n|; Y \ge a) da \\ &= pE\left[ |X_n| \int_0^Y a^{p-2} da \right] = \frac{p}{p-1} E\left[ |X_n| Y^{p-1} \right]. \end{aligned}$$

更に, Hölder を, $1/q = 1 - 1/p = (p-1)/p$ に注意して, 最後の式に適用して,

$$(\text{最後の式}) \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p (EY^p)^{1/q}$$

を得るので, 求める不等式を得る. ■

**[系 3.3 の証明]** $\tau$ を $(-\infty, a]$ への到達時間として, 即ち,

$$\tau = \min\{k \le n; X_k \le -a\} \ (= \infty \text{ if } \{\cdot\} = \emptyset),$$

更に $\sigma = \tau \wedge n$ とおくとこれらは停止時刻で, $\sigma \le n$ は有界. $B = \{\min_{k \le n} X_k \le -a\} = \{\tau \le n\} = \bigcup_{k \le n} B_k$, $B_k = \{\tau = k\}$ は時刻 $k$ で初めて $X_k$ が $-a$ 以下となる事象である. さらに, $k < n$ なら $B_k = \{\sigma = k\}$, $B_n \subset \{\sigma = n\}$ なので ($\{\tau = \infty\}$ も含んでいるので), $B_k$ 上では $X_\sigma = X_k \le -a$. また任意抽出定理により, $X_0 \le E[X_\sigma |\ \mathcal{F}_0], X_\sigma \le E[X_n |\ \mathcal{F}_\sigma]$ a.s. よって,

$$EX_0 \le EX_\sigma = E[X_\sigma; B] + E[X_\sigma; B^c] = \sum_{k \le n} E[X_\sigma; B_k] + E[X_\sigma; B^c] \le -aP(B) + E[X_\sigma; B^c]$$

従って, $B^c \cap \{\sigma = k\} = \emptyset \in \mathcal{F}_k$, 即ち, $B^c \in \mathcal{F}_\sigma$ に注意して, 次を得る;

$$aP(B) \le E[X_\sigma; B^c] - EX_0 \le E[X_n; B^c] - EX_0 \le E[X_n^+] - EX_0.$$

■

**・マルチンゲールの収束定理**

**定理 3.7 (劣マルチンゲール収束定理)** 劣マルチンゲール $(X_n, \mathcal{F}_n)$ が $\sup_n E[X_n^+] < \infty$ を満たすなら, $X_n$ は概収束する, i.e., $P(^\exists \lim X_n) = 1$.

劣マルチンゲールに対する条件 $\sup_n E[X_n^+] < \infty$ は, $\sup_n E|X_n| < \infty$ と同値である.
$(E[X_n^+] - E[X_n^-] \geq EX_1$ より, 即ち, $E[X_n^-] \leq E[X_n^+] - EX_1$ となることから明らか.)

これの証明には, 次の「劣マルチンゲールの**横断数**」に関する結果を用いる.

**定理 3.8 (横断数定理)** 劣マルチンゲール $(X_n, \mathcal{F}_n)$ の $n \leq N$ までの見本関数の区間 $(a,b)$ に対する左から右への横断数 $H_N$ に対し, $(b-a)EH_N \leq E[(X_N - a)^+]$ が成り立つ.

**[マルチンゲールの収束定理の証明]**

$$\{\liminf X_n < \limsup X_n\} \subset \bigcup_{a,b\in\mathbf{Q};a<b} \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\}.$$

右辺の集合を $A_{a,b}$ として, $P(A_{a,b}) = 0$ を示せば良い. この事象の上では, $(X_n)$ は区間 $(a,b)$ を (左から右に) 無限回横断するので, $H$ を $(X_n)_{n\geq 1}$ の $a$ から $b$ への横断数として, $P(H = \infty) = 0$ を示せば, 十分. $H_N$ を $(X_n)_{n\leq N}$ の $a$ から $b$ への横断数とすると, 横断数定理から

$$EH_N \leq \frac{E[(X_N - a)^+]}{(b-a)} \leq \sup_{N\geq 1} \frac{EX_N^+ + |a|}{(b-a)} < \infty.$$

また単調性と収束定理から, $0 \leq EH_N \uparrow EH$. よって, $EH < \infty$. これは $H < \infty$ a.s., 即ち, $P(H = \infty) = 0$ を意味する. ■

一般に, 確率過程 $\{X_1, \ldots, X_N\}$ の見本関数 $\{X_n(\omega)\}_{1\leq n\leq N}$ が区間 $(a,b)$ を左から右へ横断する回数を $H_N(\omega) = H_N(\omega; a, b)$ とする. これは, 到達時間を用いて表される. $n > N$ に対し, $X_n \equiv X_N$ として, $\tau_1 = \min\{n \geq 1; X_n \in (-\infty, a]\}$, $\tau_2 = \min\{n \geq \tau_1; X_n \in [b, \infty)\}$, 同様にして, $\tau_3, \tau_4, \ldots$ を定義する. $\{\cdot\} = \emptyset$ の時は, $= \infty$ とする. これらは ST である ($\to$ 次の問). このとき, $m = \max\{n \leq N; \tau_n < \infty\})$ とおくと $H_N = H_N(a,b) := [m/2] \geq 0$ として定義される ($[\cdot]$ は整数部分を表すガウス記号である). $2k-1 \leq m, 2k \leq m$ に応じて, $X_{\tau_{2k-1}} \leq a, X_{\tau_{2k}} \geq b$ となる.

簡単のため $H = H_N$ と表す. $H = [m/2]$, i.e., $m = 2H$ or $2H+1$.

(i) $m = 2H+1$ のとき, $X_N < b$ である (そうでなければ, $\tau_{2H+2}$ が有限値となる). このとき,

$$\sum_{k=1}^{H} (X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}}) \leq (a-b)H = -(b-a)H.$$

(ii) $m = 2H$ のとき, $X_N > a$ であり,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{H-1} (X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}}) + (X_N - X_{\tau_{2H}}) &= \sum_{k=1}^{H-1} (X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}}) + (a - X_{\tau_{2H}}) + (X_N - a) \\ &\leq (a-b)H + (X_N - a).\end{aligned}$$

そこで, $Y_k = X_{\tau_k}$ if $k \leq m$, $= X_N$ if $k > m$ とおけば, 上の不等式は次のようになる. $H \leq N$ より,

$$\sum_{k=1}^{N} (Y_{2k+1} - Y_{2k}) = \sum_{k=1}^{H} (Y_{2k+1} - Y_{2k}) \leq -(b-a)H + (X_N - a)^+.$$

**問 3.7** 上で定義した, $\tau_k$ が ST であることを示せ.

$\{\tau_1 = n\} = \{X_n \le -a, X_1, \dots X_{n-1} > a\}$, $\{\tau_2 = n\} = \{X_n \ge b, \tau_1 < n, X_{\tau_1+1}, \dots X_{n-1} < b\}$ で何れも $\mathcal{F}_n$ の元. 他も同様.

**[横断数定理の証明]** 各 $k$ に対し, $\tau_k \wedge N$ は 有界な $(\mathcal{F}_n)$-ST である. $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{\tau_k}$ として, $Y_k = X_{\tau_k \wedge N}$ とおけば, 上のと同じで, 任意抽出定理より, $(Y_k, \mathcal{G}_k)$ も劣マルチンゲールとなる. 従って, $0 \le \sum_{k=1}^{N} E[Y_{2k+1} - Y_{2k}] \le -(b-a)EH_N + E[(X_N - a)^+]$. ■

**定理 3.9** 劣マルチンゲール $(X_n, \mathcal{F}_n)$ に対し, 次は同値.

(1) $\{X_n\}$ は UI.

(2) $\{X_n\}$ は $L^1$ で収束, i.e., $X_n \to {}^{\exists}X$ in $L^1$.

(3) $\{X_n\}$ は概収束し, $X = \lim X_n$ とおけば, $X \in L^1$, $EX_n \to EX$, $E[X|\ \mathcal{F}_n] \ge X_n$ a.s.

**[証明]** $X_n \in L^1, X_n \to X$ a.s. のもと $\{X_n\}$: UI, $E|X_n - X| \to 0$ , $E|X_n| \to E|X| < \infty$ は同値.

(1) ⇒ (2): UI 性より, (U1) $\sup E|X_n| < \infty$ なので, 劣マルチンゲール収束定理より, $X_n \to {}^{\exists}X$ a.s. しかも, UI 性より, $L^1$ 収束も成り立つ.

(2) ⇒ (3): $|E|X_n| - E|X|| \le E|X_n - X| \to 0$ で, 収束列は有界なので, $\sup E|X_n| < \infty$. 劣マルチンゲール収束定理より, $X_n \to {}^{\exists}\widetilde{X}$ a.s. また $L^1$ 収束より, 適当な部分列をとれば, $X_{n_k} \to X$ a.s. なので, $\widetilde{X} = X$ a.s. 残るは $E[X|\ \mathcal{F}_n] \ge X_n$ a.s. だが, 劣マルチンゲール性より, ${}^{\forall}n, {}^{\forall}A \in \mathcal{F}_n$ に対し, $E[X_{n+k}; A] \ge E[X_n; A]$ (${}^{\forall}k \ge 1$) なので, $k \to \infty$ とすれば, $E[X; A] \ge E[X_n; A]$ となり, 結論を得る.

(3) ⇒ (1): 概収束しているので, $E|X_n| \to E|X|$ を示せば, $(X_n)$: UI となる. 仮定から, ${}^{\forall}n, {}^{\forall}A \in \mathcal{F}_n$ に対し, $E[X; A] \ge E[X_n; A]$ なので, $A = \{X_n \ge 0\}$ とすれば, $EX_n^+ \le EX^+$, i.e, $\limsup EX_n^+ \le \sup EX_n^+ \le EX^+ < \infty$. 一方, $X_n^+ \to X^+$ a.s. なので, Fatou により, $\liminf EX_n^+ \ge EX^+$. よって, $\lim EX_n^+ = EX^+$ をえる. 同様に, $\lim EX_n^- = EX^-$. 従って, $\lim E|X_n| = E|X|$ をえる. ■

# 4 連続時間マルコフ連鎖 (Continuous-time Markov Chain)

$t \geq 0$ を連続時間を表すパラメータとして, 可算集合 $S$ に値をとる確率変数の族 (**確率過程**) $(X_t)_{t\geq 0}$ が連続時間マルコフ連鎖であるとは, 次のマルコフ性をもつときをいう.

$s, t \geq 0$, $i, j, k_{u_\ell} \in S, 0 \leq u_\ell < s$ $(\ell \leq \ell_0)$ に対し,

$$P(X_{t+s} = j |\ X_s = i, X_{u_\ell} = k_{u_\ell}\ (\ell \leq \ell_0)) = P(X_{t+s} = j |\ X_s = i).$$

さらに簡単のため, 次の時間的一様性も仮定しておく.

$$P(X_{t+s} = j |\ X_s = i) = P(X_t = j |\ X_0 = i).$$

これを推移確率 $q_t(i,j) = P(X_t = j |\ X_0 = i)$ として定義し, 後で述べるように離散時間のときと同様な性質をみたすこともいえる.

## 4.1 指数時間

離散時間のマルコフ連鎖から, 連続時間のマルコフ連鎖を構成するために, ジャンプ間隔をランダムにするということが考えられる. そのために指数時間 (= 指数分布に従うランダムな時間) を導入する.

**定義 4.1** 定数 $\alpha > 0$ に対し, 確率変数 $T = T(\omega)$ が**パラメータ $\alpha$ の指数分布に従う** とは

$$P(T > t) = \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha t}$$

をみたすときをいう. 即ち $T$ が密度関数 $f(s) = \alpha e^{-\alpha s}$ の分布をもつということである. 本テキストでは $T$ を単に **$\alpha$-指数時間** or **指数時間 (exponential time)** と呼ぶことにする.

このとき平均と分散は容易に計算でき, 次のようになる.

$$E[T] = \int_0^\infty \alpha s e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}, \quad V(T) = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

**問 4.1** 上の分散の計算を確かめよ.

**命題 4.1** $T$ が指数時間なら, 次の**無記憶性 (memoryless property)** をもつ.
$t, s \geq 0$ に対し,

$$P(T > t + s |\ T > s) = P(T > t).$$

**証明**

$$P(T > t + s |\ T > s) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t} = P(T > t).$$

■

**命題 4.2** $T_1, T_2, \ldots T_n$ が独立で, それぞれ, パラメーター $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の指数時間なら, $\min\{T_1, T_2, \ldots T_n\}$ は $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$-指数時間となる. さらに

$$P(\min\{T_1, T_2, \ldots T_n\} = T_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

**証明** 簡単のため $n=2, k=1$ のときに示す.

$$P(\min\{T_1,T_2\}>t)=P(T_1>t,T_2>t)=P(T_1>t)P(T_2>t)=e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

また $T_1,T_2$ の結合分布が, 独立性から, それぞれの分布の積となることから

$$\begin{aligned}P(\min\{T_1,T_2\}=T_1)&=P(T_1<T_2)\\&=\int_0^\infty ds\alpha_1e^{-\alpha_1 s}P(s<T_2)\\&=\int_0^\infty ds\alpha_1e^{-\alpha_1 s}e^{-\alpha_2 s}\\&=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}.\end{aligned}$$

一般のときも同様である. ■

**例 4.1** A と B の二つの装置からなるシステムがあり, A が故障するまでの時間が 1-指数時間で, B が故障するまでの時間が 2-指数時間であるという. これらは独立に故障し, 一つでも故障すれば, システム全体が故障するとする. このときシステムが故障するまでの時間の平均値を求めよ.

前の命題からシステムが故障するまでの時間は 3-指数時間となるので, その平均は 1/3 となる.

## 4.2 ポアッソン過程

連続時間マルコフ連鎖として, 最も単純な例であるポアッソン過程について述べる.

**定義 4.2** $\lambda>0$ に対し, 確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が**パラメータ $\lambda$ のポアッソン過程**であるとは以下をみたすときをいう (単に **$\lambda$-ポアッソン過程**ともいう).

(1) $X_0=0$,

(2) $0\leq s<t$ なら $X_t-X_s$ はパラメータ $\lambda(t-s)$ のポアッソン分布に従う. 即ち,

$$P(X_t-X_s=k)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!}\quad (k=0,1,2,\dots).$$

(3) $X_t$ は独立増分をもつ.
即ち, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1},\dots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ は独立.

**定理 4.1** ポアッソン過程は連続時間マルコフ連鎖である.

上の独立増分性から容易に分かる.

**問 4.2** 一般に可算線形空間 $S$ に値をとる 0 を出発する連続時間確率過程が, 独立増分性をもてば, 連続時間マルコフ連鎖となることを示せ.

**解** $X_t$ を仮定をみたす確率過程とする. $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1},\dots,X_{t_{n+1}}-X_{t_n}$ の独立性を用いて, 離散時間のときと同様に, $X_{t_{n+1}}-X_{t_n}$ と $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ の

独立性, $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ と $X_{t_n}$ の独立性が示せる. これから マルコフ性をえる.

$$\begin{aligned} P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|\ X_{t_k} = j_k, 0 \le k \le n) &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n|\ X_{t_k} = j_k, 0 \le k \le n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n|\ X_{t_n} = j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|\ X_{t_n} = j_n). \end{aligned}$$

■

**定理 4.2 (ポアッソン過程の構成)** $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ を独立同分布な確率変数で, それぞれ $\lambda$-指数時間であるとする. $\tau_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k$, $\tau_0 = 0$ とおき,

$$X_t = n \iff \tau_n \le t < \tau_{n+1} \quad 即ち, \quad X_t := \sum_{n=0}^\infty n 1_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) = \max\{n; \tau_n \le t\},$$

と定義するとこれは $\lambda$-ポアッソン過程となる.

**注** 上の定理の逆も言える. 即ち, $(X_t)_{t\ge 0}$ を $\lambda$-ポアッソン過程とし, そのジャンプ時刻を $\tau_1, \tau_2, \dots$ とする. このとき $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$ は独立同分布で, それぞれ $\lambda$-指数時間となる.

証明の前に必要な事柄を述べておく.

**命題 4.3** 独立な $n$ 個の $\lambda$-指数時間 $\sigma_k$ の和 $\tau = \sum_{k=1}^n \sigma_k$ はガンマ分布 $\Gamma(n, \lambda)$ に従う, i.e.,

$$P(\tau < t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} ds.$$

**証明** $(\sigma_n)$ の独立性により,

$$P(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n < t) = \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$u_k = s_1 + \cdots s_k$ $(k = 1, \dots, n)$, 特に $s = u_n$ として変数変換すれば,

$$\begin{aligned} \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1 \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_3} du_2 u_2\ \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t du_n \frac{1}{(n-1)!} u_n^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\ &= \int_0^t ds \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

■

**定理 4.2 の証明** まず $\tau_n$ は $\sigma_{n+1}$ と独立で $\Gamma(n, \lambda)$ 分布に従うことから

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= P(\tau_n \le t < \tau_{n+1} = \tau_n + \sigma_{n+1}) \\ &= \int_0^t ds\ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} P(t < s + \sigma_{n+1}) \\ &= \int_0^t ds\ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-(t-s)\lambda} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}. \end{aligned}$$

次に同様な計算で

$$
\begin{aligned}
P(\tau_{n+1} > t+s, X_t = n) &= P(\tau_{n+1} > t+s, \tau_n \le t < \tau_{n+1}) \\
&= P(\tau_n + \sigma_{n+1} > t+s, \tau_n \le t) \\
&= \int_0^t du\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} P(u + \sigma_{n+1} > t+s) \\
&= \int_0^t du\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t+s-u)} = e^{-\lambda(t+s)}\frac{\lambda^n t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

これから

$$
P(\tau_{n+1} > t+s |\ X_t = n) = e^{-\lambda s} = P(\sigma_1 = \tau_1 > s). \tag{4.1}
$$

更に, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_{n+m}$ の分布は, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ と一致する. 実際,

$$
\begin{aligned}
&P(\tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m |\ X_t = n) \\
&= P(\tau_n \le t < \tau_{n+1}, \tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n) \\
&= P(\tau_n \le t, \tau_{n+1} - t > s_1)P(\sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n) \\
&= P(\tau_{n+1} - t > s_1 |\ X_t = n)P(\sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m) \\
&= P(\sigma_1 > s)P(\sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m) \\
&= P(\sigma_1 > s, \sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m)
\end{aligned}
$$

これより, $\tau_{n+m} - t = (\tau_{n+1} - t) + \sigma_{n+2} + \cdots + \tau_{n+m}$ に注意すれば, 一般に $m \ge 1$ に対し, 次も成り立つ.

$$
P(\tau_{n+m} > t+s |\ X_t = n) = P(\tau_m > s).
$$

上で $m$ を $m+1$ に変えたものから $m$ のときのを引けば,

$$
P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} |\ X_t = n) = P(\tau_m \le s < \tau_{m+1}) = P(X_s = m).
$$

これを用いて, $n \ge 0, m \ge 1$ に対し,

$$
\begin{aligned}
P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = m) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n+m) \\
&= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n+m |\ X_t = n) \\
&= P(X_t = n)P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} |\ X_t = n) \\
&= P(X_t = n)P(X_s = m)
\end{aligned}
$$

これを $n \ge 0$ について加えることにより,

$$
P(X_{t+s} - X_t = m) = P(X_s = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m s^m}{m!}.
$$

$m = 0$ のときは $P(X_{t+s} - X_t = m) = e^{-\lambda s}$ を得るので, 上に含まれる. 実際,

$$
P(\tau_n > t+s |\ X_t = n) = P(\tau_n > t+s |\ \tau_n \le t < \tau_{n+1}) = 0
$$

より, 上の式 (4.1) から引くと,

$$
P(X_{t+s} = n |\ X_t = n) = P(\tau_n \le t+s < \tau_{n+1} |\ X_t = n) = e^{-\lambda s}.
$$

従って,

$$\begin{aligned}P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = 0) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n)\\ &= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n|\ X_t = n)\\ &= P(X_t = n)e^{-\lambda s}.\end{aligned}$$

これを $n \geq 0$ について加えれば $P(X_{t+s} - X_t = 0) = e^{-\lambda s}$.

最後に, 独立増分性については, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_{n+m}$ の分布が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ と一致することを用いれば, $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ に対し,

$$\begin{aligned}&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)\\ &= P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \dots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k)\\ &= P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1, \dots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)\end{aligned}$$

これを繰り返して, 独立増分性をえる.

$$\begin{aligned}&P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)\\ &= P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1)\cdots P(X_{t_k - t_{k-1}} = n_k)\\ &= P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1} - X_{t_0} = n_1)\cdots P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)\end{aligned}$$

■

**例 4.2** 消防署にかかってくる電話の回数は 1 時間あたり 20 回の割合のポアッソン過程に従い, そのうち 20 %だけが緊急を要するものであるという. このとき, この緊急を要するものだけの回数を数える確率過程を考えると, これもポアッソン過程となるだろうか？もしそうなら, そのパラメータはいくつか？

答えは次の命題から容易に分かるが, 1 時間あたり 4 回の割合のポアッソン過程となる.

**命題 4.4** $X_t$ を $\lambda$-ポアッソン過程とする. この $X_t$ のジャンプにタイプ I とタイプ II の 2 種類の異なるジャンプがあるとして, それぞれ独立に確率 $p$ と $1-p$ で現れるとする. (ジャンプの大きさは全て 1 で同じであるが, 例えばグラフで考えて, ジャンプに赤と青の色が付いていて, それぞれの色のジャンプの現れる確率がそうなっていると考える.) このときタイプ I のジャンプのみからなる確率過程を $Y_t$, タイプ II のジャンプのみからなる確率過程を $Z_t$ とするとそれぞれパラメータ $\lambda p$, $\lambda(1-p)$ の独立なポアッソン過程となる.

**証明** $X_t = Y_t + Z_t$ に注意して, $X_t = n + k$ の条件のもと, $Y_t = k$ は $n + k$ 回中, $k$ 回のジャンプが確率 $p$ で選び出されることになるので

$$P(Y_t = k, Z_t = n|\ X_t = n + k) = P(Y_t = k|\ X_t = n + k) = \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n.$$

これから

$$\begin{aligned}P(Y_t = k, Z_t = n) &= P(Y_t = k, Z_t = n|\ X_t = n + k)P(X_t = n + k)\\ &= \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!}\\ &= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

**問 4.3** 最後の等号を確かめよ.

これの両辺を $n \geq 0$ で和をとると
$$P(Y_t = k) = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}.$$
同様に $k \geq 0$ で和をとると
$$P(Z_t = n) = e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}.$$
さらに上の 3 式を合わせて
$$P(Y_t = k, Z_t = n) = P(Y_t = k)P(Z_t = n).$$
以上から $Y_t, Z_t$ は独立で, それぞれ $\lambda p, \lambda(1-p)$ ポアッソン分布に従う. 次に $Y_t - Y_s$ に対しても, 上と同様な計算で,
$$\begin{aligned}P(Y_{t+s} - Y_s = k) &= \sum_{n\geq 0} P(Y_{t+s} - Y_s = k|\ X_{t+s} - X_s = n+k)P(X_{t+s} - X_s = n+k)\\&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}p^k(1-p)^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!}\\&= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}.\end{aligned}$$
従って $P(Y_{t+s} - Y_s = k) = P(Y_t = k)$. さらに全く同様な計算で,
$$\begin{aligned}&P(Y_s = k_1, Y_{t+s} - Y_s = k_2, Z_s = n_1, Z_{t+s} - Z_s = n_2)\\&= P(Y_s = k_1)P(Y_{t+s} - Y_s = k_2)P(Z_s = n_1)P(Z_{t+s} - Z_s = n_2)\end{aligned} \tag{4.2}$$
が示せて, ($\{X_s = k_1 + n_1, X_{t+s} - X_s = k_2 + n_2\}$ で条件をつけて, これらの独立性も用いる) これから一般に $(Y_t), (Z_t)$ それぞれの独立増分性が分かり, $(Y_t)$ は $\lambda p$-ポアッソン過程, $(Z_t)$ は $\lambda(1-p)$-ポアッソン過程となる. さらに上式から,
$$\begin{aligned}&P(Y_s = k_1, Y_{t+s} = k_1 + k_2, Z_s = n_1, Z_{t+s} = n_1 + n_2)\\&= P(Y_s = k_1, Y_{t+s} = k_1 + k_2)P(Z_s = n_1, Z_{t+s} = n_1 + n_2)\end{aligned} \tag{4.3}$$
が容易に導かれるので $\{Y_s, Y_{s+t}\}$ と $\{Z_s, Z_{s+t}\}$ は独立で, より一般に $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ に対し, $\{Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}\}$ と $\{Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}\}$ が独立となることも分かる. これは確率過程としての $(Y_t), (Z_t)$ の独立性を意味する. ■

**問 4.4** 上の証明において (4.2) を示し, これから (4.3) を導け.

## 4.3 連続時間ランダムウォーク

パラメータ 1 の独立な指数時間毎に, 1 歩の分布 $(p_j)_{j\in S}$ に従って, 場所 $i \in S$ から $i + j$ へ確率 $p_j$ でジャンプする確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ を**連続時間ランダムウォーク**という.

この連続時間ランダムウォーク $(X_t)_{t\geq 0}$ は, 一歩の分布 $(p_j)$ をもつ離散時間ランダムウォーク $(Y_n)_{n\geq 0}$ とそれと独立なパラメータ 1 のポアッソン過程 $(S_t)$ を用いて $X_t := Y_{S_t}$ として構成される.

このとき $(Y_n)$ と $(S_t)$ の独立増分性により, $(X_t)$ も独立増分性をもつことが容易に分かるので, 問 4.2 から, 連続時間マルコフ連鎖となる.

### 4.4 連続時間ゴルトン-ワトソン過程

$\lambda > 0$ とする．いくつかの粒子があり，各粒子は，独立な $\lambda$-指数時間毎に確率 $p_k$ でランダムに $k \geq 0$ 個の粒子に分裂する ($k = 0$ のときは死滅という)．分裂した粒子も独立に，同じ法則に従って，分裂・死滅を繰り返すものとする．このとき時刻 $t$ での全体の粒子数を $Z_t$ で表し，連続時間ゴルトン-ワトソン過程という．

これは $\{X_n\}$ を分裂確率 $(p_k)$ をもつ離散時間ゴルトン-ワトソン過程とし，$\{S_t\}$ をそれと独立な $\lambda$-ポアッソン過程として，$Z_t := X_{S_t}$ とおけば構成できる．

分裂粒子数の期待値を

$$m := \sum_{k \geq 1} k p_k$$

とおく．

**定理 4.3** $0 < p_0 + p_1 < 1$ とする．

$$P(^\forall t \geq 0, Z_t \geq 1) > 0 \iff m > 1.$$

また $t \geq 0$ に対し，$E[Z_t|\ Z_0 = 1] = e^{\lambda(m-1)t}$ となる．

**証明** 離散時間のときの結果と構成の仕方から，前半は容易に分かる．平均について考える．$E_1[*] := E[*|\ Z_0 = 1]$ として，$Z_t = X_{S_t}$ と $E_1[X_n] = m^n$ より，

$$\begin{aligned} E_1[Z_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} E_1[Z_t|\ S_t = n] P_1(S_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E_1[X_n|\ S_t = n] P(S_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_1[X_n] P(S_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(m-1)t} \end{aligned}$$

■

### 4.5 連続時間マルコフ連鎖と推移確率

可算集合 $S$ に値をとる連続時間マルコフ連鎖 $(X_t)_{t \geq 0}$ も上の連続時間ランダムウォークと同様にして，定義される．即ち，推移確率 $p(i,j)$ をもつ離散時間マルコフ連鎖 $(Y_n)_{n \geq 0}$ とそれと独立な 1-ポアッソン過程 $(S_t)_{t \geq 0}$ を用いて，$X_t := Y_{S_t}$ で構成される．

$s, t \geq 0$, $i, j, k_{u_\ell} \in S$ $(0 \leq u_\ell < s)$ $(\ell \leq \ell_0)$ に対し，

$$P(X_{t+s} = j|\ X_s = i, X_{u_\ell} = k_{u_\ell}\ (\ell \leq \ell_0)) = P(X_t = j|\ X_0 = i) =: q_t(i,j).$$

しかも上の推移確率 $q_t(i,j)$ は $Y_n$ の $n$ 階推移確率 $p_n(i,j)$ を用いて，次で与えれられる．

$$q_t(i,j) = \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} p_n(i,j).$$

**[$X_t := Y_{S_t}$ がマルコフ連鎖なることの証明]** 簡単のため，上式の右辺を $\widetilde{q}_t(i,j)$ とおき，さらにマルコフ性は $\ell_0 = 1$ のときのみ示す．任意に $u < s, \ell \leq n$ をとる．まず

$$P\left( X_{t+s} = j \,\middle|\, \begin{matrix} X_s = i \\ S_s = n \end{matrix}, \begin{matrix} X_u = k \\ S_u = \ell \end{matrix} \right) = P\left( X_{t+s} = j \,\middle|\, \begin{matrix} X_s = i \\ S_s = n \end{matrix} \right) = \widetilde{q}_t(i,j) \tag{4.4}$$

を示す. $(Y_n)$ と $(S_t)$ の独立性, $(Y_n)$ のマルコフ性, $(S_t)$ の独立増分性を用いると

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t+s}=j \,\middle|\, \begin{matrix} X_s=i \\ S_s=n \end{matrix}, \begin{matrix} X_u=k \\ S_u=\ell \end{matrix}\right) \\
&=\sum_{m\ge 0} P\left(X_{t+s}=j, S_{t+s}=n+m \,\middle|\, \begin{matrix} X_s=i, \\ S_s=n \end{matrix}, \begin{matrix} X_u=k, \\ S_u=\ell \end{matrix}\right) \\
&=\sum_{m\ge 0} P\left(Y_{n+m}=j, S_{t+s}-S_s=m \,\middle|\, \begin{matrix} Y_n=i, \\ S_s=n \end{matrix}, \begin{matrix} Y_\ell=k, \\ S_u=\ell \end{matrix}\right) \\
&=\sum_{m\ge 0} \frac{P(Y_{n+m}=j, Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_{t+s}-S_s=m)P(S_s=n, S_u=\ell)}{P(Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_s=n, S_u=\ell)} \\
&=\sum_{m\ge 0} P(Y_{n+m}=j|\ Y_n=i, Y_\ell=k)P(S_{t+s}-S_s=m) \\
&=\sum_{m\ge 0} P(Y_m=j|\ Y_0=i)P(S_t=m)=\widetilde{q}_t(i,j).
\end{aligned}$$

一方, 同様な計算で

$$\begin{aligned}
P(X_{t+s}=j|\ X_s=i, S_s=n) &= \sum_{m\ge 0} P(X_{t+s}=j, S_{t+s}-S_s=m|\ X_s=i, S_s=n) \\
&=\sum_{m\ge 0} \frac{P(Y_{n+m}=j, Y_n=i)P(S_{t+s}-S_s=m)P(S_s=n)}{P(Y_n=i)P(S_s=n)} \\
&=\sum_{m\ge 0} P(Y_{n+m}=j|\ Y_n=i)P(S_t=m)=\widetilde{q}_t(i,j).
\end{aligned}$$

以上から (4.4) が成り立つ. 最後の式 $\widetilde{q}_t(i,j)$ が $\ell \le n$ にも, $k \in S$, $u<s$ にも無関係で, しかも $\ell \le n$ については条件の事象が互いに素なので, 条件の方で和をとっても結果は変わらない. よって時間的一様なマルコフ性が得られる.

$$P(X_{t+s}=j|\ X_s=i, X_u=k)=P(X_{t+s}=j|\ X_s=i)=\widetilde{q}_t(i,j).$$

これから推移確率も分かる.

$$q_t(i,j)=P(X_t=j|\ X_0=i)=\widetilde{q}_t(i,j).$$

■

**命題 4.5 (チャップマン-コルモゴロフの方程式)** $\displaystyle q_{t+s}(i,j)=\sum_{k\in S} q_t(i,k)q_s(k,j).$

**証明**

$$\begin{aligned}
[\text{右辺}] &= \sum_{k\in S} P(X_t=k|\ X_0=i)P(X_{t+s}=j|\ X_t=k) \\
&=\sum_{k\in S} P(X_t=k|\ X_0=i)P(X_{t+s}=j|\ X_t=k, X_0=i) \\
&=\sum_{k\in S} \frac{P(X_{t+s}=j, X_t=k, X_0=i)}{P(X_0=i)} \\
&=\frac{P(X_{t+s}=j, X_0=i)}{P(X_0=i)}=P(X_{t+s}=j|\ X_0=i)=[\text{左辺}]
\end{aligned}$$

■

**命題 4.6** $Y_n$ が $\mathbf{Z}_+$ 上の出生率 $\lambda_i$, 死亡率 $\mu_i$ ($i \in \mathbf{Z}_+$ の離散時間出生死亡連鎖のとき, 連続時間出生死亡連鎖 $X_t = Y_{Z_t}$ の推移確率について次が成り立つ. (但し $\mu_0 = 0, \lambda_i > 0$, また $i \geq 1$ なら $\mu_i > 0$.)

$$\begin{aligned}
&q_h(i, i+1) = \lambda_i h + o(h)\\
&q_h(i, i-1) = \mu_i h + o(h)\ (i \geq 1)\\
&q_h(i, i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)\\
&q_0(i, j) = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

特に $\lim_{h\to 0} q_h(i,i) = 1$. 但し $q_h(0, -1) = 0$, $q_h(0, 0) = 1$ に注意.

**証明** 推移確率 $q_h(i, j)$ は $Y_n$ の $n$ 階推移確率 $p_n(i, j)$ を用いて, $t \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
q_h(i, j) &= \sum_{n\geq 0} e^{-h}\frac{h^n}{n!}p_n(i, j)\\
&= e^{-h}\left(\delta_{ij} + hp(i, j) + O(h^2)\right)\\
&= \delta_{ij} + hp(i, j) + O(h^2).
\end{aligned}$$

これと

$$p(i, i+1) = \lambda_i, \quad p(i, i-1) = \mu_i, , \quad p(i, i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)$$

に注意すれば容易に分かる. ■

一般に $(X_t)$ を $S$ に値をとる時間的一様なマルコフ連鎖として, 適当な関数 $f : S \to \mathbf{R}$ に対し,

$$Gf(i) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(E^i[f(X_t)] - f(i)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^i[f(X_t) - f(X_0)]$$

で定まる $G$ を $(X_t)$ の**生成作用素 (generator)** という. 但し, $E^i[\cdot] = E[\cdot|\ X_0 = i]$ とする.

**定理 4.4** 上の出生死亡連鎖においては, 有界関数 $f : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$ に対し,

$$Gf(i) = \lambda_i f(i+1) + \mu_i f(i-1) - (\lambda_i + \mu_i)f(i)$$

となる. さらに

$$E^i[f(X_t) - f(X_0)] = \int_0^t E^i[Gf(X_s)]ds.$$

**証明** $h > 0$ が十分小さいとき,

$$\begin{aligned}
E^i[f(X_h)] &= f(i+1)q_h(i, i+1) + f(i-1)q_h(i, i-1) + f(i)q_h(i, i) + o(h)\\
&= f(i) + h\left[\lambda_i f(i+1) + \mu_i f(i-1) - (\lambda_i + \mu_i)f(i)\right] + o(h)
\end{aligned}$$

これより $Gf(i)$ は求まる. さらにマルコフ性を用いると,

$$\begin{aligned}
E^i[f(X_t) - f(X_0)] &= \int_0^t \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^i[f(X_{s+h}) - f(X_s)]ds\\
&= \int_0^t \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^i\left[E^{X_s}[f(X_h) - f(X_0)]\right]ds\\
&= \int_0^t E^i\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^{X_s}[f(X_h) - f(X_0)]\right]ds\\
&= \int_0^t E^i\left[Gf(X_s)\right]ds.
\end{aligned}$$

但し, 上で $\lim_{h\to 0}$ と $E^i$ の交換が出来るのは, $f$ の有界性と $0 < \lambda_i, \mu_i < 1$ から, ルベーグの収束定理が使えることによる. ■

上の定理は $f(i)$ から瞬間的に rate $\lambda_i$ で $f(i+1)$ に, rate $\mu_i$ で $f(i-1)$ に, rate $1-\lambda_i-\mu_i$ で変わらないことを表している. 従って逆に生成作用素 $G$ が分かれば, マルコフ過程 $(X_t)$ も分かることになる. 即ち $G$ と $(X_t)$ が 1 対 1 に対応する. この生成作用素の概念は状態空間 $S$ がもっと一般のとき, マルコフ過程論において重要な位置を占める.

## 参考文献

[1] 志賀　徳造「ルベーグ積分から確率論」　共立出版　(2000)

[2] R. B. シナジ「マルコフ連鎖から格子確率モデルへ」今野紀雄／林　俊一　訳, シュプリンガー (2001)

[3] 西尾　真喜子「確率論」　実教出版　(1978 初版, 1985 第 5 版)