確率積分と確率微分方程式

Stochastic Integrals and Stochastic Differential Equations

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

目 次

本講義では, 確率過程論を展開する上で, 重要な道具である確率積分（伊藤積分）や伊藤の公式等について解説し, 基本となるマルコフ過程について, 確率微分方程式を用いて, どんな性質をどのように調べるか, ということについてその一端を紹介したいと思う. (確率論の基本的な設定は理解していることを前提とする.)

1 確率過程の定義 (Definition of Stochastic Processes)

1.1 確率空間と確率過程

時間と共にランダムに変化する値を表すものを確率過程というが, 普通, 時間を $t \geq 0$ として, その時のランダムな値を $X_t = X_t(\omega)$ として表す. ここで, $\omega \in \Omega$ は何かというと, ランダムさを表す変数 (確率変数) で, これに応じて確率が決まっているのである. 即ち, $\omega \in \Omega$ で, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間として, この上の時間パラメーターをもつ確率変数の集まりを確率過程と呼ぶ. (普通は, $\mathbf{R}^d$ に値をとるものを考える.) また, 時間をコイン投げのように 1 回目, 2 回目, $\cdots$ と回数としてみるなら, $n = 1, 2, \ldots$ を時間として, やはりその時のランダムな値を $X_n = X_n(\omega)$ として表す. 先のを**連続時間**, 後のを離**散時間**という.

また. ω 毎に見れば, 確率過程とは, 全ての時間を通して, 起こり得る 1 つの状態＝見本関数, 経路, パス（sample path）$X.(\omega) = (X_t(\omega))_{t \geq 0})$ を表す変数と言っても良い.

特に, 見本関数が時間の連続関数のとき, **連続過程**, あるいは C **過程 (continuous processes)** といい, 右連続で左極限を持つ（第一種不連続の）とき, **不連続過程**, あるいは, D **過程 (discontinuous processes)** という. このとき, パスは, rcll (right continuous withleft-hand limits) であるとか, cádlág (仏語) であるとかいう.

I を $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 内の区間, あるいは, 離散集合 (主に, $\mathbf{Z}_+$ か, $\mathbf{N}$ の全体か, ある番号 N まで) とし, S をある位相空間とする. (主に, d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ を考えるが, もっと一般の位相空間でもよい.)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t \in I}$ とは, 時間 $t \in I$ によって添字付けられた（＝パラメタライズされた）S に値をとる確率変数 $X_t = X_t(\omega)$ の集まりを指す. (変数 $\omega \in \Omega$ は, 必要のあるときを除いて, 常に省略する.)

I が区間のとき, **連側時間 (continuous time)** の確率過程といい, 離散の時, **離散時間 (discrete time)** の確率過程という. ただ離散時間のときは, $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ と表すことが多い. また, S を**状態空間 (state space)** という.

本講義では, 主に連続時間について考えるので, 以下では, 特に断らない限り, $I = [0, T]$ or $[0, \infty)$ として, $S = \mathbf{R}^1$ とする.

情報系 (filtration) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ とは, $\mathcal{F}$ の増大する部分 σ-field の集まりをいう.

$\{X_t\}$ が $(\mathcal{F}_t)$**-適合 (adapted)** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}_t$, 即ち, X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測.

$\{X_t\}$ が可測とは, (t, ω) の関数として可測, i.e., 次が可測.

$$(t, \omega) \in ([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}^1[0, \infty) \otimes \mathcal{F}) \mapsto X_t(\omega) \in (\mathbf{R}^1, \mathcal{B}^1)$$

確率過程 $\{X_t\}$ が与えられたとき, $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s; s \leq t) = \bigvee_{s \leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}^1) = \sigma(\bigcup_{s \leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}^1))$ とおけば, $(\mathcal{F}_t^0)$-適合となる.

普通, 上の情報系を考えるときは, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}; P(N) = 0\}$ を加えて定義する, i.e., $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N})$. これにより, ${}^\forall t \geq 0, X_t = Y_t$ a.s. なら, $\{Y_t\}$ も $(\mathcal{F}_t)$-適合となるからである. この情報系を, $\{X_t\}$ による**標準情報系 (canonical filtration)** という.

2 つの確率過程 $X = \{X_t\}, Y = \{Y_t\}$ に対し,

・X と Y が同等 $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall t, P(X_t = Y_t) = 1$

・X と Y が強同等 $\overset{\text{def}}{\iff} P({}^\forall t, X_t = Y_t) = 1$

・X と Y が法則同等 $\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall t_1, \cdots, t_n \in I, (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{(\mathrm{d})}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ (分布が等しい), つまり, 任意の有限時点での有限次元分布が等しい.

明らかに, [強同等 $\Rightarrow$ 同等 $\Rightarrow$ 法則同等] であるが, 一般に逆は言えない.

しかし, 例えば, 共に見本関数が右連続という条件があれば, 有理時点で一致する確率は 1 であるから, 右連続性を用いれば, 無理時点でも一致することになり, 同等から強同等が言える.

1.2 指数時間と Poisson 過程

定数 $\alpha > 0$ に対し, 確率変数 $\tau = \tau(\omega)$ が**パラメータ α の指数分布に従う** とは

$$P(\tau > t) = \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha t}$$

をみたすときをいう. 即ち τ が密度関数 $f(s) = \alpha e^{-\alpha s}$ の分布をもつということである. 本講義では τ を単に **α-指数時間** or **指数時間 (exponential time)** と呼ぶことにする.

このとき平均と分散は容易に計算でき, 次のようになる.

$$E[\tau] = \int_0^\infty \alpha s e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}, \quad V(\tau) = E[\tau^2] - (E[\tau])^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

問 1.1 上の分散の計算を確かめよ.

命題 1.1 τ が指数時間なら, 次の**無記憶性 (memoryless property)** をもつ. $t, s \geq 0$ に対し,

$$P(\tau > t + s |\ \tau > s) = P(\tau > t).$$

証明

$$P(\tau > t + s |\ \tau > s) = \frac{P(\tau > t + s)}{P(\tau > s)} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t} = P(\tau > t).$$

■

命題 1.2 $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ が独立で, それぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の指数時間なら, $\min\{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n\}$ は $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$-指数時間となる. さらに

$$P(\min\{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n\} = \tau_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

証明 簡単のため $n = 2, k = 1$ のときに示す.

$$P(\tau_1 \wedge \tau_2\} > t) = P(\tau_1 > t, \tau_2 > t) = P(\tau_1 > t)P(\tau_2 > t) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}.$$

また τ_1, τ_2 の結合分布が, 独立性から, それぞれの分布の積となることから

$$\begin{aligned} P(\min\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_1) &= P(\tau_1 < \tau_2) \\ &= \int_0^\infty ds \alpha_1 e^{-\alpha_1 s} P(s < \tau_2) \\ &= \int_0^\infty ds \alpha_1 e^{-\alpha_1 s} e^{-\alpha_2 s} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

一般のときも同様である. ■

例 1.1 A と B の二つの装置からなるシステムがあり, A が故障するまでの時間が 1-指数時間で, B が故障するまでの時間が 2-指数時間であるという. これらは独立に故障し, 一つでも故障すれば, システム全体が故障するとする. このときシステムが故障するまでの時間の平均値を求めよ.

前の命題からシステムが故障するまでの時間は 3-指数時間となるので, その平均は 1/3 となる.

$\lambda > 0$ に対し, 確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が**パラメータ λ の Poisson (ポアッソン) 過程**であるとは以下をみたすときをいう (単に **λ-Poisson 過程**という).

(1) $X_0 = 0$,

(2) $0 \leq s < t$ なら $X_t - X_s$ はパラメータ $\lambda(t-s)$ の Poisson 分布に従う. 即ち,

$$P(X_t - X_s = k) = e^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(3) X_t は独立増分をもつ.

即ち, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ は独立.

ここで, λ-Poisson 分布に従う確率変数 X を, 簡単に, **λ-Poisson 変数** と呼ぶが, このとき, 平均 $EX = \lambda$, 2 乗平均 $EX^2 = \lambda^2 + \lambda$, 分散 $V(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$, ラプラス変換 (母関数) $L(t) := E[e^{-tX}] = \exp[\lambda(e^{-t} - 1)]$ $(t \geq 0)$, 特性関数 $\varphi_X(z) : E[e^{izX}] = \exp[\lambda(e^{iz} - 1)]$ $(z \in \mathbf{R})$ となる.

(普通, 母関数は, $G(s) = E[s^X]$ $(|s| < 1)$ として定義するが, $s = e^{-t}$ $(t \geq 0)$ と変えればラプラス変換である.)

定理 1.1 (Poisson 過程の構成) $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ を独立同分布な確率変数で, それぞれ λ-指数時間であるとする. $\tau_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k$, $\tau_0 = 0$ とおき,

$$X_t = n \iff \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \quad 即ち, \quad X_t := \sum_{n=0}^\infty n 1_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) = \max\{n; \tau_n \leq t\},$$

と定義するとこれは λ-Poisson 過程となる.

注 上の定理の逆も言える. 即ち, $(X_t)_{t\geq 0}$ を λ-Poisson 過程とし, そのジャンプ時刻を $\tau_1, \tau_2, \dots$ とする. このとき $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$ は独立同分布で, それぞれ λ-指数時間となる.

証明の前に必要な事柄を述べておく.

命題 1.3 独立な n 個の λ-指数時間 σ_k の和 $\tau = \sum_{k=1}^n \sigma_k$ はガンマ分布 $\Gamma(n, \lambda)$ に従う, i.e.,

$$P(\tau < t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} ds.$$

証明 (σ_n) の独立性により,

$$P(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n < t) = \int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$u_k = s_1 + \cdots s_k$ $(k = 1, \dots, n)$, 特に $s = u_n$ として変数変換すれば,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1 + \cdots s_n < t} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots s_n)} ds_1 \cdots ds_n &= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1 \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_3} du_2 u_2 \ \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t du_n \frac{1}{(n-1)!} u_n^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \\
&= \int_0^t ds \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

■

定理 1.1 の証明 まず τ_n は σ_{n+1} と独立で $\Gamma(n,\lambda)$ 分布に従うことから

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= P(\tau_n \le t < \tau_{n+1} = \tau_n + \sigma_{n+1}) \\ &= \int_0^t ds\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} P(t < s + \sigma_{n+1}) \\ &= \int_0^t ds\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-(t-s)\lambda} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1} ds = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^n}{n!}. \end{aligned}$$

次に同様な計算で

$$\begin{aligned} P(\tau_{n+1} > t+s, X_t = n) &= P(\tau_{n+1} > t+s, \tau_n \le t < \tau_{n+1}) \\ &= P(\tau_n + \sigma_{n+1} > t+s, \tau_n \le t) \\ &= \int_0^t du\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} P(u + \sigma_{n+1} > t+s) \\ &= \int_0^t du\ \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t+s-u)} = e^{-\lambda(t+s)}\frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{aligned}$$

これから

$$P(\tau_{n+1} > t+s |\ X_t = n) = e^{-\lambda s} = P(\sigma_1 = \tau_1 > s). \tag{1.1}$$

更に, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_{n+m}$ の分布は, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ と一致する. 実際,

$$\begin{aligned} &P(\tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m |\ X_t = n) \\ &\quad = P(\tau_n \le t < \tau_{n+1}, \tau_{n+1} - t > s_1, \sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n) \\ &\quad = P(\tau_n \le t, \tau_{n+1} - t > s_1) P(\sigma_{n+2} > s_2, \dots, \sigma_{n+m} > s_m)/P(X_t = n) \\ &\quad = P(\tau_{n+1} - t > s_1 |\ X_t = n) P(\sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m) \\ &\quad = P(\sigma_1 > s_1) P(\sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m) \\ &\quad = P(\sigma_1 > s_1, \sigma_2 > s_2, \dots, \sigma_m > s_m) \end{aligned}$$

これより, $\tau_{n+m} - t = (\tau_{n+1} - t) + \sigma_{n+2} + \cdots + \sigma_{n+m}$ に注意すれば, 一般に $m \ge 1$ に対し, 次も成り立つ.

$$P(\tau_{n+m} > t+s |\ X_t = n) = P(\tau_m > s).$$

上で m を $m+1$ に変えたものから m のときのを引けば,

$$P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} |\ X_t = n) = P(\tau_m \le s < \tau_{m+1}) = P(X_s = m).$$

これを用いて, $n \ge 0, m \ge 1$ に対し,

$$\begin{aligned} P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = m) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n+m) \\ &= P(X_t = n) P(X_{t+s} = n+m |\ X_t = n) \\ &= P(X_t = n) P(\tau_{n+m} \le t+s < \tau_{n+m+1} |\ X_t = n) \\ &= P(X_t = n) P(X_s = m) \end{aligned}$$

これを $n \geq 0$ について加えることにより,

$$P(X_{t+s} - X_t = m) = P(X_s = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m s^m}{m!}.$$

$m = 0$ のときは $P(X_{t+s} - X_t = m) = e^{-\lambda s}$ を得るので, 上に含まれる. 実際,

$$P(\tau_n > t + s|\ X_t = n) = P(\tau_n > t + s|\ \tau_n \leq t < \tau_{n+1}) = 0$$

より, 上の式 (1.1) から引くと,

$$P(X_{t+s} = n|\ X_t = n) = P(\tau_n \leq t + s < \tau_{n+1}|\ X_t = n) = e^{-\lambda s}.$$

従って,

$$\begin{aligned} P(X_t = n, X_{t+s} - X_t = 0) &= P(X_t = n, X_{t+s} = n) \\ &= P(X_t = n)P(X_{t+s} = n|\ X_t = n) \\ &= P(X_t = n)e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

これを $n \geq 0$ について加えれば $P(X_{t+s} - X_t = 0) = e^{-\lambda s}$. 従って, 上式 $= P(X_t = n)P(X_{t+s} - X_t = 0)$ となり, X_t と $X_{t+s} - X_t$ の独立性も分かる. 一般の最後に, 独立増分性については, 同様に, $X_t = n$ の条件のもと, $\tau_{n+1} - t, \sigma_{n+2}, \ldots, \sigma_{n+m}$ の分布が $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ と一致することを用いれば, $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ に対し,

$$\begin{aligned} &P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\ &\quad = P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \ldots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k) \\ &\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k) \end{aligned}$$

これを繰り返して, 独立増分性をえる.

$$\begin{aligned} &P(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\ &\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1 - t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k - t_{k-1}} = n_k) \\ &\quad = P(X_{t_0} = n_0)P(X_{t_1} - X_{t_0} = n_1) \cdots P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \end{aligned}$$

■

1.3 Brown 運動 (Wiener 過程)

実数値確率過程 $(B_t)_{t \geq 0}$ が **(1 次元) Brown 運動 (Brownian motion)** であるとは,

(1) $B_0 = 0$ a.s.

(2) (B_t) は連続, i.e., a.a.ω に対し, 見本関数 $B_\cdot(\omega)$ が連続.

(3) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し, $\{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\}_{k=1}^n$ は独立で, それぞれ, 正規分布 $N(0, t_k - t_{k-1})$ に従う.

この定義は 1 次元であるが, 独立な d 個の Brown 運動を成分として, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ を d **次元 Brown 運動 (d-dim. BM)** という. (d 個の Brown 運動の直積確率空間を考えれば, 独立となる.) この時, 満たす性質は上とほぼ同じで, (3) の最後で, 「$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ が d 次元正規分布 $N(0, (t_k - t_{k-1})I_d)$ に従う」 と変わるだけなので, それが定義だと言っても良い.

ここで, 問題となるのは, 上のような確率過程を構成することが出来るのかということである. 時点を止める毎に, 正規分布に従う確率変数を作ることは可能だが, 単純に, その時間を全て通して支配できるような確率測度が構成できるわけではない. また, Kolmogorov の拡張定理を用いれば, 可算無限個の独立な確率変数は構成できるが, それを加えただけでは, 離散時間で変化する確率過程しか構成できない. 何らかの方法で, 各 ω 毎に, 連続関数 $B_\cdot = (B_t)_{t\geq 0}$ に値をとる確率変数として確率測度 P を構成しなくてはならない.

$W = C([0,\infty) \to \mathbf{R}^1)$ とし, 広義一様収束位相で定まる σ-加法族を $\mathcal{W}$ と表す.

さらに, $w = w(t) \in W_0 \overset{\text{def}}{\iff} w \in W; w(0) = 0$ とおく. また, 有限個の任意の時点 $\mathbf{t}_n = (t_1, \ldots, t_n); 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ と, $A_n \in \mathcal{B}^n$ に対し, $C(\mathbf{t}_n, A_n) = \{w \in W_0; (w(t_1), \ldots, w(t_n)) \in A_n\}$ を**シリンダー集合 or 筒集合 (cylinder set)** という. シリンダー集合全体で生成される σ-加法族を, $\mathcal{W}_0$ と表す. (これは, W からの相対位相で定まる σ-加法族と一致することが知られている.)

定理 1.2 (Wiener 測度の存在と一意性) $(\Omega, \mathcal{F}) = (W_0, \mathcal{W}_0)$ として, この上に, $B_t(w) = w(t)$ が Brown 運動となるような確率測度 P_B が唯一つ存在する. この P_B を **(1 次元) Wiener 測度**という.

この証明については節の最後に述べる. (ちなみに, この証明法は 3 通り知られていて, 直感的に分り易いのは「単純対称ランダムウォークを折れ線で繋ぎ, 連続過程化したもの S_t に対し, $\sqrt{1/n}S_{nt}$ の極限が Brown 運動となる」というものであるが, 準備が大変なのでここでは紹介しない,)

今後, Brown 運動というときには, この Wiener 測度のもとでのものを考えるので, この Brown 運動を **(1 次元) Wiener 過程 (Wiener process)** ともいう.

また, d 次元 Brown 運動 $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ の分布は, $W_0^d \ni w; w \in C([0,\infty) \to \mathbf{R}^d), w(0) = 0$ 上の確率測度となり, これを d **次元 Wiener 測度** という.

B_t の分布は次のように与えられる.

$$p_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} e^{-|x|^2/(2t)} \quad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2})$$

に対し, $P(B_t \in dx) = p_t(x)dx$ となる. この $g_t(x)$ を d 次元正規分布 $N_d(0,t)$ の密度関数という.

また, この正規分布の**特性関数 (characteristic ft)** は, 次で与えられる.

$$\varphi(z) = \varphi_{B_t}(z) := E[e^{iz\cdot B_t}] = e^{-t|z|^2/2} \quad (z \in \mathbf{R}^d).$$

但し, $z \cdot B_t = z_1 B_t^1 + \cdots + z_d B_t^d$.

更に,

$$p_t(x,y) := p_t(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-|y-x|^2/(2t)}$$

とすると, Brown 運動の有限次元分布は $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と $A_k \in \mathcal{B}^d$ に対し,

$$P(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} dy_1 p_{t_1}(y_1) \int_{A_2} dy_2 p_{t_2 - t_1}(y_1, y_2) \cdots \int_{A_n} dy_n p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n)$$

で与えられる.

これは, 独立増分性より, $t_0 = 0$ として,

$$P(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in A_k, k = 1, 2, \ldots, n) = \prod_{k=1}^n \int_{A_k} p_{t_k - t_{k-1}}(x_k) dx_k$$

となるので, 変数変換 $x_k = y_k - y_{k-1}$ $(y_0 = 0)$ を用いれば良い. 但し, $\{B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2\} = \{B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} - B_{t_1} \in A_2 - A_1\}$ に注意. ($A_2 - A_1$ は元毎の差の全体で, 差集合とは異なる.) 実

際, $n=2$ のとき,

$$\begin{aligned} P(B_{t_1}\in A_1, B_{t_2}\in A_2) &= P(B_{t_1}\in A_1)P(B_{t_2}-B_{t_1}\in A_2-A_1) \\ &= \int_{A_1} dx_1 p_{t_1}(x_1)\int_{A_2-A_1} p_{t_2-t_1}(x_2)dx_2 \\ &= \int_{A_1} dy_1 p_{t_1}(y_1)\int_{A_2} p_{t_2-t_1}(y_2-y_1)dy_2 \end{aligned}$$

以下, $(\mathcal{F}_t)$ を Brown 運動 (B_t) による標準情報系とする.

[Brown 運動の性質]

(1) $EB_t^{2n}=(2n-1)!!t^n, EB_t^{2n-1}=0$ $(n\geq 1)$.

(2) $0\leq s<t$ に対し, B_t-B_s と $\mathcal{F}_s$ は独立. これは, 独立増分性と同値.

また, これから, (B_t) が後で述べるマルチンゲールであることが分る. i.e., $0\leq s<t\Rightarrow E[B_t-B_s|\ \mathcal{F}_s]=0$

(3) 共分散 $E[B_tB_s]=t\wedge s$ $(s,t>0)$.

(4) 連続過程 (X_t) が Brown 運動 $\iff$ ${}^\forall 0\leq s<t,\ E[e^{iz(X_t-X_s)};A_s]=e^{-(t-s)z^2/2}P(A_s)$ $({}^\forall A_s\in\mathcal{F}_s)$. 但し, $(\mathcal{F}_t)$ は (X_t) による標準的情報系である.

上の式は, 条件付きで書けば, $E[e^{iz(X_t-X_s)}|\ \mathcal{F}_s]=e^{-(t-s)z^2/2}$ となる.)

(5) 次の変換で Brown 運動は不変. ($a>0$ は 1 つ固定する.)

$$B_t^a=B_{a+t}-B_a,\ \overline{B_t}=-B_t,\ S^a(B)_t=\sqrt{a}B_{t/a}.$$

但し, $S^a(B)_t$ を**スケール変換**という.

(6) $[T_1,T_2]$ $(0\leq T_1<T_2)$ での Brown 運動の全変動量は a.s. で無限大, i.e., 分割 $\Delta=\{t_k\};T_1=t_0<t_1<\cdot<t_n=T_2$ として,

$$V=\sup_{\Delta}\sum_{k=1}|B_{t_k}-B_{t_{k-1}}|=\infty \quad \text{a.s.}$$

(7) ${}^\forall\varepsilon>0$, $(1/2-\varepsilon)$-Hödler 一様連続性をもつ, 即ち, $\gamma>0$ に対し,

$$\lim_{h\to 0}\sup_{s\neq t;|t-s|\leq h}\frac{|B_t-B_s|}{|t-s|^\gamma}=0 \text{ or } \infty \text{ a.s. if } \gamma<1/2 \text{ or } \gamma\geq 1/2.$$

(8) a.s. で Brown 運動の見本関数は全ての時点で微分不可である.

(9) (B_t) を d 次元 Brown 運動とする. T を d 次直交行列とすれば, (TB_t) も Brown 運動となる. また, $\tau_S:=\inf\{t>0;B_t\in S=S_r^{d-1}\}$ を球面 $S=\partial B^d(0,r)$ への到達時間とすれば, $B_{\tau_S}=B_{\tau_S(\omega)}(\omega)$ の分布は球面 S 上の一様測度となる.

他に次の性質を満たすことが知られている. (証明は略する.)

- $X_t=tB_{1/t}$ も Brown 運動. 但し, $X_0=0$ とする.

- $$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}=1\quad \text{a.s.}$$

  更に対称性より, $\liminf_{t\downarrow 0}$ は -1 で, スケール変換により,

  $$\limsup_{t\uparrow\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\quad \text{a.s.}$$

- $^\forall\varepsilon>0$, $(1/2-\varepsilon)$-Hödler 一様連続性をもつが, より詳しくは次を満たす.

  $$\lim_{h\to 0}\sup_{s\neq t;|t-s|\le h}\frac{|B_t-B_s|}{\sqrt{2|t-s|\log(1/|t-s|)}}=1.$$

[Brown 運動の性質の証明] (1) 部分積分により直接計算もできるし, 特性関数 $E[e^{izB_t}]=e^{-tz^2/2}$ の両辺を微分しても良い.

(2) $0\le s_1<\cdots<s_n\le s<t$ と有界 Borel 関数 $f(x), g(x_1,\dots,x_n)$ に対し, $E[f(B_t-B_s)g(B_{s_1},\dots,B_{s_n})]=E[f(B_t-B_s)]E[g(B_{s_1},\dots,B_{s_n})]$ が有限次元分布の計算と同様に示せる.
実際, $n=2$ で書けば,

$$\begin{aligned}
&E[f(B_t-B_s)g(B_{s_1},B_{s_n})]\\
&= \int_{\mathbf{R}^4} f(x_4-x_3)g(x_1,x_4)p_{s_1}(x_1)p_{s_2-s_1}(x_1,x_2)\cdots p_{s-s_2}(x_2,x_3)p_{t-s}(x_3,x_4)dx_1\cdots dx_4\\
&= \int_{\mathbf{R}^4} f(y_2)g(x_1,x_2)p_{s_1}(x_1)p_{s_2-s_1}(x_1,x_2)p_{s-s_2}(y_1)p_{t-s}(y_2)dx_1dx_2dy_1dy_2\\
&= \int_{\mathbf{R}} f(y_2)p_{t-s}(y_2)dy_2\int_{\mathbf{R}^2} g(x_1,x_2)p_{s_1}(x_1)p_{s_2-s_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&= E[f(B_t-B_s)]E[g(B_{s_1},B_{s_2})]
\end{aligned}$$

ここでは, $x_4-x_3=y_2, x_3-x_2=y_1$ と変換し, $\int p_{s-s_2}(y_1)dy_1=1$ を用いた.

よって, f,g を Borel 集合の定義関数とすれば, B_t-B_s と $(B_{s_1},\dots,B_{s_n})$, 即ち, $\mathcal{F}_s^0$ とが独立となり, 零集合族 $\mathcal{N}$ を加えても同じである.

また更に, $f(x)=x$ ととれて, 独立だと条件付が消えるので, $E[B_t-B_s|\ \mathcal{F}_s]=E[B_t-B_s]=0$

(3) $0\le s<t$ なら, $E[B_tB_s]=E[(B_t-B_s)B_s+B_s^2]=EB_s^2=s$.

(4) ($\Rightarrow$) は上で示したことから明らか. ($\Leftarrow$) については, 仮定より, $0\le s_1<\cdots<s_n<s<t$ と有界 Borel 関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ に対し,

$$\begin{aligned}
E[e^{iz(X_t-X_s)}f(X_{s_1},\dots,X_{s_n})] &= E[E[e^{iz(X_t-X_s)}|\ \mathcal{F}_s]f(X_{s_1},\dots,X_{s_n})]\\
&= e^{-(t-s)z^2/2}E[f(X_{s_1},\dots,X_{s_n})].
\end{aligned}$$

これから, X_t-X_s と $\mathcal{F}_s$ が独立で, 正規分布 $N(0,t)$ に従う.

(5) X_t と表し, $E[e^{iz(X_t-X_s)}|\ \mathcal{F}_s]=e^{-(t-s)z^2/2}$ を満たし, 連続過程であることを確かめれば良いが, 殆ど明らか.

(6) (5) の結果から $[T_1,T_2]=[0,1]$ で示せば十分. まず B_t が $t\in[0,1]$ 上 a.s. で, 一様連続なので,

$$\delta_n=\max_{1\le k\le n}|B_{k/n}-B_{(k-1)/n}|\to 0\ (n\to\infty)\quad \text{a.s.}$$

また, $X_n=\sum_{k=1}^n(B_{k/n}-B_{(k-1)/n})^2$ に対し, $Z_k=(B_{k/n}-B_{(k-1)/n})^2-1/n$ とおけば, $EZ_k^2=3/n^2-2/n^2+1/n^2=2/n^2$ なので,

$$E(X_n-1)^2=\sum_{k=1}^n EZ_k^2=\frac{2}{n}\to 0.$$

従って, $^\exists\{n_k\}; X_{n_k} \to 1$ a.s. これらより,

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \geq \frac{X_{n_k}}{\delta_{n_k}} \to \infty \quad \text{a.s.}$$

これにより, ω を止める毎に, Brown 運動による時間積分 $\displaystyle\int_0^t f(s)dB_s(\omega)$ はたとえ $f(s)$ が有界連続関数であっても, 恒等的に 0 でない限り定義できないことが分る.

(7) $E|B_t - B_s|^{2n} = c_n|t-s|^n$ $(c_n = (2n-1)!!)$ なので, 本節の最後に述べる **Kolmogorov の連続変形定理**により, $^\forall\gamma < (n-1)/(2n) \to 1/2$ に対し, γ-Hölder 一様連続性を持つ.

更に, $\gamma = 1/2$ のとき, ∞ となることは, $^\forall L \geq 1$ を固定して, $A_n = \{|B_{k/n} - B_{(k-1)/n}| \leq L/\sqrt{n}, k = 1, 2, \ldots, n\}$ とおくと, スケーリングにより, $P(|B_{k/n} - B_{(k-1)/n}| \leq L/\sqrt{n}) = P(|B_k - B_{k-1}| \leq L) = P(|B_1| \leq L) =: p_L \in (0,1)$ なので, 独立性より, $P(A_n) = p_L^n$ となる. よって, $\sum_{n\geq1} P(A_n) < \infty$ をえる. Borel-Cantelli より, $P(\limsup A_n) = 0$. 従って, 確率 1 で, $^\exists N = N(\omega) \geq 1; ^\forall n \geq N, ^\exists k \leq n, |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}| > L/\sqrt{n}$. $L \geq 1$ の任意性より, 題意を得る.

(8) 時間区間を $[0,1)$ で示せば十分. 次の手順で示す.

$$P(^\exists s \in [0,1); ^\exists B'_s) \leq P\left(\bigcup_{m\geq1}\bigcup_{N\geq1} A_{m,N}\right) = 0.$$

但し,

$$A_{m,N} = \bigcap_{n\geq N}\bigcup_{i=1}^{n+1}\bigcap_{j=i+1}^{i+3}\left\{|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \frac{8m}{n}\right\}.$$

まず, $^\exists s_0 \in [0,1]; ^\exists B'_{s_0}$ なら,

$$^\exists m \geq 1, ^\exists t_0 > s_0; |B_t - B_{s_0}| \leq m(t - s_0), \quad t \in [s_0, t_0].$$

更に, $s_k = ([ns_0] + k)/n, 1 \leq k \leq 4$ に対し, $s_0 < s_1 \leq \cdots \leq s_4, s_4 - s_0 \leq 4/n$, かつ, $^\exists N \geq 1; ^\forall n \geq N, s_k \in [s_0, t_0]$ で, 上のことより, $k = 2,3,4$ について,

$$|B_{s_k} - B_{s_{k-1}}| \leq |B_{s_k} - B_{s_0}| + |B_{s_0} - B_{s_{k-1}}| \leq 2m(s_4 - s_0) \leq \frac{8m}{n}.$$

以上より, 整理すると $^\exists m, N \geq 1; ^\forall n \geq N$ に対し, $i = [ns_0] + 1$ とおけば, $1 \leq i \leq n+1$ で, $j = i+1, i+2, i+3$ について, $|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq 8m/n$. 従って, 最初の不等式が成り立つ. 後は $^\forall m, N \geq 1, P(A_{m,N}) = 0$ を示せば良い. 簡単な計算により,

$$P\left(|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \frac{8m}{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi/n}}\int_0^{8m/n} e^{-x^2/(2/n)}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{8m/\sqrt{n}} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

よって

$$\begin{aligned} P(A_{m,N}) &\leq \inf_{n\geq N} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}\bigcap_{j=i+1}^{j+3}\left\{|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \frac{8m}{n}\right\}.\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=i+1}^{i+3} P\left(|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \frac{8m}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0. \end{aligned}$$

■

(9) 前半は, 有限時点での増分の特性関数を計算すればすぐ分かる. 実際, $z, x \in \mathbf{R}^d$ に対し, $\langle z, Tx\rangle = \langle {}^tTz, x\rangle$ より, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n, z_k \in \mathbf{R}^d (k = 1, 2, \ldots, n)$ に対し,

$$E\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\langle z_k, T(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\rangle\right\}\right] = e^{-\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})|{}^tTz_k|^2} = e^{-\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})|z_k|^2}$$

を得るので, z_k の第 j 成分以外を全て 0 とすれば, (TB_t) の第 j 成分が Brown 運動で, 更に, 最後の式がその積と一致しているので, 成分ごとの独立性も成り立つ.

後半は, 勝手な直交行列 T に対し, τ_S^T を TB_t に対する S への到達時刻とすると, $\tau_S^T = \tau_S$ なので, 上の結果と Brown 運動の分布の一意性より, $^\forall A \in \mathcal{B}(S)$ に対し,

$$P(B_{\tau_S} \in A) = P(T(B)_{\tau_S^T} \in A) = P(T(B)_{\tau_S} \in A) = P(T(B_{\tau_S}) \in A) = P(B_{\tau_S} \in T^{-1}A).$$

これは $\mu_S(d\xi) := P(B_{\tau_S} \in d\xi)$ が球面 S 上の回転不変測度であることを表している. さらに, $t \to \infty$ のとき, $P(B_t \in B(0,r)) = \int_{B(0,r)} p_t(x)dx \to 0$ より, $P(\tau_S < \infty) = 1$ が言えるので, $\mu_S(S) = 1$ を得る. (もし, $P(\tau_S = \infty) > 0$ なら, $0 < P({}^\forall t > 0, B_t \in B^o(0,r)) \le \liminf_{t\to\infty} P(B_t \in B(0,r)) = 0$ となってしまい矛盾.) ■

[Brown 運動の構成] 3 通りの方法が知られているが, ここでは一番, 易しい方法で述べる.

$t \in [0,1]$ で示せば十分である. $[0,T]$ も同様で, 一意性より, $[0,\infty)$ に拡張できる. $D = \bigcup_{n\ge1}\{k/2^n; k=0,1,\dots,2^n\}$ を $[0,1]$ 内の 2 進有理数全体とする.

まず, $\mathbf{R}^\infty$ 上への確率空間の拡張定理である **Kolmogorov の拡張定理** を用いることにより, $\mathbf{R}^D$ ($\ni w = w(t) : D \to \mathbf{R}$ 関数) 上に, $X_t(w) = w(t)$ の任意の有限次元分布が Brown 運動と同じ式で与えられる確率測度 P_0 が構成できる. (D の元に番号付けをして, ${}^\forall n$ 個の時点で, 有限次元分布が決まり, それが Kolmogorov の拡張定理の両立条件を満たすことがいえるので, D 全体で, 上の条件を満たす確率測度の存在がいえる.)

更に, 次の **Kolmogorov の正規化定理** の条件を満たすことがいえるので, (X_t) は D 上 a.s. で一様連続となり, その右連続化したもの $\widetilde{X_t} = \lim_{r\downarrow t; r\in D} X_r$ が連続変形となり, $B_t = \widetilde{X_t}$ が求めるものとなる.

定理 1.3 (Kolmogorov の正規化定理・連続変形定理)

(1) $D = \bigcup_{n\ge1}\{k/2^n; k=0,1,\dots,2^n\}$ を $[0,1]$ 内の 2 進有理数全体とする. 一般に Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ に値をとる確率過程 $\{X_t\}_{t\in D}$ が,

$$ {}^\exists C, \alpha, \beta > 0; E\|X_t - X_s\|^\alpha \le C|t-s|^{1+\beta} $$

を満たすなら, X_t は D 上 a.s. で, 一様連続である.

(2) $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が ${}^\forall s,t \in [0,1]$ に対し, 上と同じ不等式を満たせば, 連続変形 $\{\widetilde{X_t}\}_{t\in[0,1]}$ が一意的に存在し, しかも ${}^\forall \gamma < \beta/\alpha$ に対し, γ-Hölder 一様連続性をもつ.

$$ \lim_{h\to0} \sup_{s\ne t; |t-s|\le h} \frac{\|X_t - X_s\|}{|t-s|^\gamma} = 0 \quad \text{a.s.} $$

[証明] 簡単のため, ノルム $\|\cdot\|$ を $|\cdot|$ で表す. $0 < \gamma < {}^\forall\delta < \beta/\alpha$ を固定し, $\Delta_n = 1/2^n$ とおく. $\beta - \alpha\delta > 0$ に注意.
(1) まず, 簡単な計算

$$ E\left[\sum_{n\ge1}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{|X_{k\Delta_n} - X_{(k-1)\Delta_n}|}{\Delta_n^\delta}\right)^\alpha\right] \le \sum_{n\ge1}\sum_{k=1}^{2^n} C\Delta_n^{1+(\beta-\alpha\delta)} = C\sum_{n\ge1}\Delta_n^{\beta-\alpha\delta} < \infty. $$

により, 平均の中が a.s. で有限となるので,

$$ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{|X_{k\Delta_n} - X_{(k-1)\Delta_n}|}{\Delta_n^\delta}\right)^\alpha = 0 \quad \text{a.s.} $$

よって,

$$ P\left({}^\exists n_0; {}^\forall n \ge n_0, {}^\forall k = 1,2,\dots,2^n, |X_{k\Delta_n} - X_{(k-1)\Delta_n}| < \Delta_n^\delta\right) = 1. $$

この確率 1 の事象 Ω_0 の上では,

$$ {}^\exists n_0; {}^\forall r, r' \in D; 0 < r - r' < \Delta_{n_0}, |X_r - X_{r'}| \le C'|r-r'|^\delta \tag{1.2} $$

$C' = 2/(1-2^{-\delta})$ が成り立つことが示せるので, D 上一様連続となる. 実際, ${}^\exists n \ge n_0; \Delta_{n+1} < r - r' \le \Delta_n$ で, r, r' は, 共にある同じ区間 $[k\Delta_n, (k+1)\Delta_n]$ に入るか, それぞれが隣り合う区間 $((k-1)\Delta_n, k\Delta_n), (k\Delta_n, (k+1)\Delta_n)$ に入るかのどちらかになる.

$r, r' \in [k\Delta_n, (k+1)\Delta_n]$ のとき, $|X_r - X_{r'}| \le |X_r - X_{k\Delta_n}| + |X_{k\Delta_n} - X_{r'}|$ と分けて, まず, $r - k\Delta_n = \varepsilon_1\Delta_{n+1} + \cdots + \varepsilon_p\Delta_{n+p}$ と 2 進展開しておく (${}^\exists p \ge 1, \varepsilon_i = 0$ or 1). $r_0 = k\Delta_n, r_j = k\Delta_n + \varepsilon_1\Delta_{n+1} + \cdots + \varepsilon_j\Delta_{n+j}$ $(j = 1,2,\dots,p)$ とおく. $r_j - r_{j-1} = \varepsilon_j\Delta_{n+j} \le \Delta_{n+j}$ なので, Ω_0 上で,

$$ |X_r - X_{k\Delta_n}| \le \sum_{j=1}^p |X_{r_j} - X_{r_{j-1}}| < \sum_{j=1}^\infty \Delta_{n+j}^\delta = \Delta_{n+1}^\delta/(1-2^{-\delta}). $$

$|X_{k\Delta_n} - X_{r'}|$ も同様なので, 結局, 次を得る. $(r - r' > \Delta_{n+1}$ に注意.)

$$|X_r - X_{r'}| \le 2\Delta_{n+1}^{\delta}/(1-2^{-\delta}) \le 2(1-2^{-\delta})^{-1}|r-r'|^{\delta}.$$

$r \in ((k-1)\Delta_n, k\Delta_n), r' \in (k\Delta_n, (k+1)\Delta_n)$ のときも, $k\Delta_n$ を間に挟んで, $k\Delta_n - r, r' - k\Delta_n < \Delta_n$ なので, 同様に 2 進展開すれば, 全く同じ不等式を得る.

以上により, (1.2) が成り立つ.

(2) (1) より, X_t は D 上一様連続となるので, $\widetilde{X_t}$ を $t \in D$ では X_t, $t \notin D$ では, $\widetilde{X_t} = \lim_{r\in D; r\downarrow t}$ と定義すれば, 連続過程となり,

$$^{\exists}n_0; {}^{\forall}s, t \in [0,1]; 0 < t - s < \frac{1}{2^{n_0}}, |\widetilde{X_t} - \widetilde{X_s}| \le C'|t-s|^{\delta}$$

を満たす. $\gamma < \delta < \beta/\alpha$ととったので, γ-Hölder 一様連続性を持つことは明らか. 更に, $t \notin D$ に対し, $r_n \in D; r_n \downarrow t$ をとれば,

$$E|\widetilde{X_t} - X_t|^{\alpha} \le \liminf_{n\to\infty} E|\widetilde{X_{r_n}} - X_t|^{\alpha} \le C \liminf_{n\to\infty} |r_n - t|^{1+\beta} = 0$$

よって, ${}^{\forall}t \in [0,1], P(X_t = \widetilde{X_t}) = 1$. 即ち, (X_t) と $(\widetilde{X_t})$ は同等となる. また, この連続変形は明らかに強同等の意味で一意的である. ■

1.4 マルコフ過程, マルチンゲール

(X_t): **Markov 過程 (Markov process)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の時刻 $0 \le s < t$ と有界 Borel 関数 f に対し, $E[f(X_t)|\ \mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|\ X_s]$ a.s. 更に, (上式)$= E[f(X_{t-s})|\ X_0 = x]|_{x=X_s}$ a.s. となるとき, **時間的一様な Markov 過程 (time-homogeneous MP)** という. より正確には, x を出発するマルコフ過程 (X_t, P_x) $(P_x = P(\cdot|\ X_0 = x))$ に対し, ${}^{\forall}x$, $E_x[f(X_t)|\ \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_{t-s})]$ a.s. となるときをいう.

$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s; s \le t)$ のとき, この定義は, 次のようになる.
$0 \le s_1 < \cdots < s_n = s < t$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対し,

$$E[f(X_t)|\ X_{s_1} \le a_1, \ldots, X_{s_n} \le a_n] = E[f(X_t)|\ X_s \le a_n].$$

更に, 時間的一様なら, (上式)$= E[E[f(X_{t-s})|\ X_0 = x]|_{x=X_s}|\ X_s \le a_n]$. x を出発する Markov 過程なら, ${}^{\forall}x$,

$$E_x[f(X_t)|\ X_{s_1} \le a_1, \ldots, X_{s_n} \le a_n] = E_x[E_{X_s}[f(X_{t-s})]|\ X_s \le a_n].$$

マルコフ過程で, とる値が離散の時, マルコフ連鎖という言い方もする.

可算集合 S に値をとる確率過程 $(X_t)_{t\ge 0}$ が**連続時間マルコフ連鎖 (Continuous-time Markov Chain)** であるとは, 次のマルコフ性をもつときをいう.

$s, t \ge 0$, $i, j, k_\ell \in S, 0 \le u_\ell < s$ $(\ell \le \ell_0)$ に対し,

$$P(X_{t+s} = j|\ X_s = i, X_{u_\ell} = k_\ell\ (\ell \le \ell_0)) = P(X_{t+s} = j|\ X_s = i).$$

さらに次を, 時間的一様性という.

$$P(X_{t+s} = j|\ X_s = i) = P(X_t = j|\ X_0 = i).$$

このとき, これを推移確率 $q_t(i,j) = P(X_t = j|\ X_0 = i)$ として定義する.

定理 1.4 Poisson 過程は連続時間マルコフ連鎖である.

独立増分性によるが, 次の問から明らか.

問 1.2 一般に可算線形空間 S に値をとる 0 を出発する連続時間確率過程が, 独立増分性をもてば, 連続時間マルコフ連鎖となることを示せ.

解 X_t を仮定をみたす確率過程とする. $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ に対し, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ の独立性を用いて, $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ と $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ の独立性, $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ と X_{t_n} の独立性が容易に分る. これから マルコフ性をえる.

$$\begin{aligned} P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_k} = j_k, 1 \le k \le n) &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n | X_{t_k} = j_k, 1 \le k \le n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j_{n+1} - j_n | X_{t_n} = j_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n). \end{aligned}$$

■

[Brown 運動の Markov 性]

0 を出発する Brown 運動 (B_t, P) に対し, $(x + B_t)$ は x を出発する Brown 運動となる. $(W = W^d, \mathcal{W})$ 上で, その分布を P_x と表せば, $x + B_t$ は B_t と変わる. これは P_x のもとで, $B_t(w) = w(t), w \in W$ と定義するのと同じで, 当然, $P_x(B_0 = x) = 1$ を満たす. 即ち, $(B_t, P_x) \overset{(\mathrm{d})}{=} (x + B_t, P_0)$ である. また, $P = P_0$ である.

情報系は, 前と少し変わり, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{W}; {}^\forall x \in \mathbf{R}^d, P_x(N) = 0\}$ として, 標準情報系 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}$, $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_s; s \le t)$ を考える. また, その右連続化を $\mathcal{F}_t^* \equiv \mathcal{F}_{t+} := \cap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ とする. 後で示すように $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t$ が成り立つ.

$s \ge 0$ に対し, W 上の **シフト作用素 (shift operator)** θ_s を $\theta_s w(t) := w(t + s)$ と定義する.

定理 1.5 (($\mathcal{F}_t$) に関する Markov 性) Y を有界な $\mathcal{W}$ 可測関数とする. ${}^\forall x \in \mathbf{R}^d, {}^\forall s \ge 0$ に対し, 次が成り立つ.

$$E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y] \text{ a.s.}$$

これは有界 Borel 関数 f と, $0 \le s < t$ に対し, $Y = f(B_{t-s})$ とおけば, $Y \circ \theta_s = f(B_t)$ で, 上の式は, $E_x[f(B_t) | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_{t-s})] = E[f(B_{t-s}) | B_0 = x]|_{x = B_s}$ となり, 時間的一様な Markov 過程であることが分る.

[証明] f, f_j を $\mathbf{R}^1$ 上の有界 Borel 関数として, $Y = f(B_t), \prod_{j \le n} f_j(B_{t_j})$ $(0 \le t_1 < \cdots < t_n)$ の順で示せば, 一般の有界で $\mathcal{W}$-可測な Y については, 2 つ目の形の一次結合やそれらの極限操作で得られるので, 成り立つ.
$Y = f(B_t)$ のとき, $f(x) = e^{izx}$ (${}^\forall z \in \mathbf{R}$) で示せば十分. 即ち, $Y = e^{izB_t}$ で , $Y \circ \theta_s = e^{izB_{t+s}}$ となるので,

$$E_x[e^{izB_{t+s}} | \mathcal{F}_s] = E_x[e^{izB_s} e^{iz(B_{t+s} - B_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{izB_s} E_0[e^{izB_t}] = E_0\left[e^{iz(x+B_t)}\right]\Big|_{x=B_s} = E_{B_s}[e^{izB_t}].$$

$Y = \prod_{j \le n} f_j(B_{t_j})$ $(0 \le t_1 < \cdots < t_n)$ のとき, 帰納法で示す. n の時成り立つとして, $n+1$ で示す.

$$\begin{aligned} E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] &= E_x\left[E_x\left[\prod_{j \le n+1} f_j(B_{t_j + s}) \middle| \mathcal{F}_{t_1 + s} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E_x\left[f_1(B_{t_1+s}) E_{B_{t_1+s}}\left[\prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j - t_1}) \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E_{B_s}\left[f_1(B_{t_1}) E_{B_{t_1}}\left[\prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j - t_1}) \right] \right] \\ &= E_{B_s}\left[f_1(B_{t_1}) \prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j}) \right] = E_{B_s}[Y]. \end{aligned}$$

2 行目は帰納法の仮定を, 3 行目は, 上の結果を, 但し, 次が有界 Borel であることに注意.

$$f(x) = E_x\left[\prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j-t_1})\right] = E_0\left[\prod_{j=2}^{n+1} f_j(x+B_{t_j-t_1})\right].$$

4 行目は, 帰納法の仮定を $\mathcal{F}_{t_1}$ での条件付けで用いた. ■

上の Markov 性は, $(\mathcal{F}_t^*)$ についても成り立つ.

定理 1.6 ($(\mathcal{F}_t^*)$ に関する Markov 性) 有界な $\mathcal{W}$ 可測関数 Y と $^\forall x \in \mathbf{R}^d, {}^\forall s \ge 0$ に対し,

$$E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s^*] = E_{B_s}[Y] \text{ a.s.}$$

しかも, これから $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t$ も言える.

[証明] 先に Markov 性の式から $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t$ を示す. $^\forall A, B \in \mathcal{F}_s^*$ とする. $Y = 1_B$, $\widetilde{Y} = E_{B_s}[1_B]$ とおけば, $E_x[1_B; A] = E_x[\widetilde{Y}; A]$, i.e., $E_x[(1_B - \widetilde{Y}); A] = 0$. $\widetilde{Y}$ は $\mathcal{F}_s$-可測で, $A \in \mathcal{F}_s^*$ が任意なので, $1_B = \widetilde{Y}$ a.s. となり, これから, $^\exists \widetilde{B} \in \mathcal{F}_s; N \in \mathcal{N}; B = \widetilde{B} \cup N \in\in \mathcal{F}_s$. (実際, $N = \{1_B \ne \widetilde{Y}\} \in \mathcal{N}$ で, $\{1_B = \widetilde{Y}\} = N^c \in \mathcal{F}_s$ なので, $1_B = \widetilde{Y}1_{N^c} + 1_{B\cap N}$ で, 第 1 項は, $\mathcal{F}_s$ 可測で, しかも 0 か 1 しかとらないので, $\widetilde{B} = \{\widetilde{Y}1_{N^c} = 1\}$ とおけば良い.) よって $\mathcal{F}_s^* \subset \mathcal{F}_s$.

Markov 性を示す. $Y = f(B_t)$; f は有界 Borel 関数とする. $^\forall \varepsilon > 0, A \in \mathcal{F}_{s+\varepsilon}$ なので, $E_x[f(B_{t+s+\varepsilon})| \mathcal{F}_{s+\varepsilon}] = E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)]$ a.s. 即ち, $E_x[f(B_{t+s+\varepsilon})1_A] = E_x[E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)1_A]$. $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば, BM の連続性と f の有界性から, 収束定理を用いて, $E_x[f(B_{t+s})1_A] = E_x[E_{B_s}[f(B_t)1_A]$. これから, 前と同様に, 有界 Borel な Y まで拡張できる. ■

定理 1.7 (Blumenthal の 0-1 法則 (zero-one law)) $A \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^*$ に対し, $P(A) = 0$ or 1.

[証明] $A \in \mathcal{F}_0$ なら,

$$P_x(A) = E_x[1_A] = E_x[E_x[1_A \circ \theta_0]; A] = E_x[E_{B_0}[1_A]; A] = E_x[P_x(A); A] = P_x(A)^2.$$

よって $P_x(A) = 0$ or 1. ■

これを用いると, 0 を出発する 1 次元 Brown 運動 (B_t) に対し, これが原点に留まることなく即座に正に（従って, 負にも）動くことが分る. つまり, $\tau_{(0,\infty)} := \inf\{t > 0; B_t > 0\}$ とおくと, $P(\tau_{(0,\infty)} = 0) = 1$ となる.

(X_t): **マルチンゲール (martingale)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の時刻 $0 \le s \le t$ に対し, $X_t \in L^1$ で, $^\forall A_s \in \mathcal{F}_s, E[X_t; A_s] = E[X_s; A_s]$, 即ち, 条件付きで表せば, $E[X_t| \mathcal{F}_s] = X_s$ a.s.

但し, martingale を表すのに, 良く (M_t) を用いるので, $M_t \in L^1$, $E[M_t| \mathcal{F}_s] = M_s$ a.s. となる. このとき, 平均は一定 $EM_t = EM_0$ となる.

また, $E[X_t| \mathcal{F}_s] \ge X_s$ a.s. のとき, **劣マルチンゲール (sub-martingale)** といい, このとき, 平均は増大する. $EX_0 \le EX_s \le EX_t$. さらに, 逆の不等式を満たすとき, **優マルチンゲール (super-martingale)** という.

定理 1.8 (Doob-Meyer の分解) (X_t): conti. sub-mart. で, クラス (DL) に属する, i.e., 任意の $a > 0$ に対し, $\{X_{\tau\wedge a}\}_\tau$ が一様可積分 (但し, τ は**停止時刻 (stopping time)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall t \ge 0, \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$) なら $X_t = A_t + M_t$; (M_t): conti. mart., (A_t): conti. 増加過程, $A_0 = 0$. しかも, この分解は一意的.

ある停止時刻列 $\tau_n; \uparrow\uparrow \infty$ a.s.; があり, $(X_{t\wedge\tau_n})$ がマルチンゲールとなるとき, (X_t) を**局所マルチンゲール (local martinga;e)** という ,

マルチンゲールの全体を $\mathcal{M}$ と表わすとき, 局所マルチンゲールの全体は $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ と表す.

マルチンゲールは, 重要な概念で, この先で定義する確率積分は, 連続, or rcll なマルチンゲールとなる. その中でも中心となるのは L^2 可積分なものであるが, ジャンプ型では, L^1 のものも扱う.

従って, 最低限でも L^1 で, rcll マルチンゲールなものを扱う. その際, 右連続性を用いれば, 離散時間マルチンゲールでの結果を, 連続時間マルチンゲールに拡張することができる.

2 C 空間と D 空間 (C-spaces and D-paces)

ポーランド空間 (Polish sp.): 完備可分距離化可能位相空間, 即ち, ある距離のもと, 完備可分となる位相をもつ空間. つまり, 可算な稠密部分集合をもつ完備距離空間と同相な空間のことである。

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ や, 開区間 $(0,1)$ も $\mathbf{R}^1$ と同相であるから, そうである.

I を実数の区間として, $\mathbf{R}^I$ で写像 $f: I \to \mathbf{R}$ の全体を表すとする.

次の関数空間, それぞれ順に C 空間, D 空間という, もポーランド空間である.

$$C = C(I) = \ I \text{ 上の連続関数全体}, \quad D = D(I) = \ I \text{ 上の第 1 種不連続関数全体}.$$

ここで, $f: I \to \mathbf{R}^1$ が第 1 種不連続とは, I の右端を除く各点で右連続, 左端を除く各点で左極限をもつものをいう.

2.1 C 空間と一様収束位相

区間 I 上の連続関数全体の C 空間 $C = C(I)$ は, I がコンパクトのとき, i.e., $I = [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, 次の距離で完備可分となる. これで決まる位相を**一様収束位相**という.

$$d_u(f,g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|.$$

I がコンパクトでないとき, ${}^{\exists}I_n = [a_n, b_n]; I = \bigcup I_n$ より, 次の距離で完備可分となる. これで決まる位相を**広義一様収束位相**という.

$$d_u(f,g) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n}(1 \wedge \sup_{t \in I_n} |f(t) - g(t)|).$$

完備性は良く知られているように容易に分る. Weierstrass の多項式近似定理を用いれば, 有理多項式（有理数係数の n 次多項式, $n \geq 0$) の全体が稠密となることが分かるので, 可分.

問 2.1 上のことを証明せよ.

2.2 D 空間と Skorohod 位相

区間 I 上の第 1 種不連続関数全体の D 空間 $D = D(I)$ は, 上と同じ位相の下では, 完備ではあるが, 可分にはならない. ($f_\alpha = 1_{[0,\alpha] \cap I}$ $(\alpha > 0)$ を考えれば良い.)

しかし, 次の Billingsley の距離で決まる位相; Skorohod 位相の下で, ポーランドとなる.

I がコンパクトのとき, i.e., $I = [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$,

D 空間 $D = D(I)$ は, 次の Billingsley の距離 d_B で完備可分となる.

まず, Φ を区間 I 上で, 順序を保存する同相写像の全体とする. $\varphi \in \Phi$ に対し,

$$\lambda(\varphi) = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \right|$$

とおき, $\varphi \in \Psi \overset{\text{def}}{\iff} \lambda(\varphi) < \infty$ とする.

$$d_B(f,g) = \inf_{\varphi \in \Psi} \{ \|f \circ \varphi - g\|_\infty + \lambda(\varphi) \}$$

と定義する.

ちなみに, この位相は, 次の距離 d_S でも同じ位相を与える (これを Skorohod 位相という) が, d_S の下では, 可分にはなるが, 完備にはならない.

$$d_S(f,g) = \inf_{\varphi\in\Phi}\{\|f\circ\varphi - g\|_\infty + \|\varphi - i\|_\infty\}.$$

ラフに言えば, グラフで見たときに, 定義域に垂直な方向で 2 つの D 関数の距離を測ってもジャンプのずれがあるとどうしてもその差が残るので, 方向を変えてやって, (2 つの曲線とみて間の) 距離を測ってやれば, その距離で, 完備可分になるということである.

I がコンパクトでないときは, C 空間と同様にして完備可分とできる.

2.3 連続型確率過程と不連続型確率過程

確率過程 (X_t) の見本関数 $X.$ が a.s. で連続であるとき, 連続型確率過程といい, 不連続であるとき, 不連続型確率過程という. しかし, 不連続といっても, 途中で発散していたり, 右不連続なものは除外して, 右連続で左極限を持つ, 即ち, 第 1 種不連続なものだけを考える.

ある時点 $T>0$ で発散してるなら, $t\in[0,T)$ で考えれば良いし, 右極限はもつが, 右不連続で, 左連続なときは, そこでの値を入れ替えて考えれば, 右連続で左極限をもつように作り変えられるので, 本質的な違いは無いように見えるが, 常に左連続だと, 未来が直前の値から決まってしまうことになり, 不連続を考える意味が少し弱くなってしまう. (つまり, 左連続だと t での値が, $t-$, 即ち, $s<t$ で決まってしまう. $X_t = X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s$. しかし, そうでなければ, $t-$ と更に, t でのジャンプの大きさ $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ によって決まるので, 不連続性を考慮する必要がある.)

Brown 運動は, 連続な Markov 過程であり, 連続型確率過程の基礎で, 尚且つ, 中心となるものである.

また, Poisson 過程は, 大きさ 1 の正のジャンプのみで変化する最も単純なジャンプ型確率過程であるが, ジャンプ型を考える場合に重要となるのは, 次に述べる **Poisson 配置 (Poisson random measure)** である.

2.4 Poisson 配置

$(Z,\mathcal{Z})$ を可測空間として, $\lambda(dz)$ をその上の σ 有限測度とする.

$N(dz) = N(\omega;dz)$ が Z 上の λ (を平均測度として持つ) **Poisson 配置 (Poisson random measure)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) a.a. $\omega\in\Omega$ に対し, $N(\omega;dz)$ は $(Z,\mathcal{Z})$ 上の測度.

(2) ${}^\forall A\in\mathcal{Z}$ に対し, $\lambda(A)<\infty$ なら $N(A)$ は $\lambda(A)$ Poisson 変数, i.e., パラメータ $\lambda(A)$ の Poisson 分布に従う, $\lambda(A)=\infty$ なら $N(A)=\infty$ a.s.

(3) $A_n\in\mathcal{Z}$: 互いに素なら, $N(A_n)$ は独立.

このとき, (2) の条件により, 平均測度は $\widehat{N}(dz) := E[N(dz)] = \lambda(dz)$ となる.

本講義では, Z が時空間の場合, 即ち, $Z=[0,\infty)\times\mathbf{R}^m \ni (t,z)$, $\mathcal{Z}=\mathcal{B}^1([0,\infty)\times\mathbf{R}^m)$ として, $\nu(dz)$ を $\mathbf{R}^m$ 上の測度で, $\nu(\{0\})=0$, かつ, ${}^\forall n\geq 1, \nu(|z|\geq 1/n)<\infty$ を満たすものとする. (ν は σ-有限となる.) この ν を **Lévy 測度** という. このとき, $N(dtdz)$ を $dt\nu(dz)$-Poisson 配置として考える. これの構成と次の重要な結果を証明しよう.

命題 2.1 (τ_k, ξ_k) を $N(dt,dz)$ の台＝質点とする, i.e.,

$$N(dt,dz) = \sum \delta_{(\tau_k,\xi_k)}(dt,dz).$$

このとき, $^\forall k, j \geq 1$, $P(\tau_k \neq \tau_j) = 1$. 即ち, 同じ時点に質点を, 2 つ以上もつことはない. 言い換えると, 各時点でもつ質点は高々 1 つである. $P(^\forall t \geq 0, N(\{t\} \times \mathbf{R}^m) = 0 \text{ or } 1) = 1$.

この結果は, 平均測度の時間部分が連続であることによる. (証明は本質的には伊藤 [1] にある.)

以下では, ジャンプ空間を $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^1$ としておく.
まず, $dt\nu(dz)$**-Poisson 配置の構成**について
$^\forall T > 0$ を固定し, $t \in [0,T]$ の範囲で考える.
$Z_0 = \{|z| \geq 1\}$, $Z_n = \{1/(n+1) \leq |z| < 1/n\}$ $(n \geq 1)$ とする. $n \geq 0$ に対し, $\nu_n = \nu|_{Z_n}$ とおき, 各 $[0,T] \times Z_n$ 上で確率測度

$$\overline{\lambda_n}(dt,dz) \equiv \frac{\lambda(dt,dz)}{\lambda([0,T]\times Z_n)} := \frac{dt\nu_n(dz)}{T\nu(Z_n)} \quad (\lambda(dt,dz) := dt\nu(dz))$$

に対し, これを分布として持つ独立確率変数列を, $\{Y_k^n = (\tau_k^n, \xi_k^n)\}_{k\geq 1}$ とする, i.e., $P(Y_k^n \in dtdz) = \overline{\lambda_n}(dt,dz)$. 更に, K_n を $T\nu(Z_n)$-Poisson 変数として, $\{Y_k^n, K_m; n \geq 0, k \geq 1, m \geq 0\}$ は独立として構成する. これらに対し,

$$N_n(dt,dz) = \sum_{k=1}^{K_n} \delta_{Y_k^n}(dt,dz) = \sum_{k=1}^{K_n} 1_{dtdz}(Y_k^n), \quad N = \sum_{n\geq 0} N_n$$

とおけば, この N が求めるものとなる.

問 2.2 上のことを確かめよ.

$N_n(A) = k$ は $K_n = m \geq k$ で, m 個の中の k 個の Y_k^n は A の中で, 残りの $m-k$ 個は $A_n^c := ([0,T]\times Z_n) \setminus A$ の中となることに注意して計算すれば $N_n(A)$ が $\lambda(A)$-Poisson となることが分り, 独立な Poisson の和は再び Poisson で, 他の性質も明らか.
実際,

$$\begin{aligned}
P(N_n(A) = k) &= \sum_{m\geq k} P(K_n = m, N_n(A) = k, N_n(A_n^c) = m-k) \\
&= \sum_{m\geq k} e^{-T\nu(Z_n)} \frac{(T\nu(Z_n))^m}{m!} \binom{m}{k} \overline{\lambda_n}(A)^k \overline{\lambda_n}(A_n^c)^{m-k} \\
&= e^{-\lambda_n(A)} \frac{(\lambda_n(A))^k}{k!}
\end{aligned}$$

となる. $\lambda_n(A) + \lambda_n(A_n^c) = \lambda([0,T]\times Z_n) = T\nu(Z_n)$ に注意.
また, N_i: λ_i-Poisson 変数で $(i = 1,2)$, 独立なら, $N_1 + N_2$ は $(\lambda_1 + \lambda_2)$-Poisson 変数となることは,

$$P(N_1+N_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} P(N_1 = k, N_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.$$

(命題の証明)

N の質点 (τ_i, ξ_i) は上の構成から, $^\exists n \geq 0, k \geq 1; (\tau_k^n, \xi_k^n)$ と等しいので, 任意の $n, m \geq 0, k, j \geq 1; (n, k) \neq (m, j)$ に対し, $P(\tau_k^n \neq \tau_j^m) = 1$,i.e., $P(\tau_k^n = \tau_j^m) = 0$ を示せば良い. そこで $^\forall M \geq 1$ を 1 つ固定し, $[0, T]$ を M 等分して, $1 \leq \ell \leq M$ に対し, $Z_{n,\ell} = [(\ell-1)T/M, \ell T/M) \times Z_n$, 但し, $Z_{n,M} = [(M-1)T/M, T] \times Z_n$ とする. このとき, $\overline{\lambda_n}(Z_{n,\ell}) = 1/M$ となる. 従って, $\tau_k^n = \tau_j^m$ なら, これは $^\exists \ell; [(\ell-1)T/M, \ell T/M)$ の元となるので, $Y_k^n = (\tau_k^n, \xi_k^n) \in Z_{n,\ell}, Y_j^m = (\tau_j^m, \xi_j^m) \in Z_{m,\ell}$ となり, Y_k^n, Y_j^m の独立性から,

$$P(\tau_k^n = \tau_j^m) \leq P\left(\bigcup_{\ell=1}^M \left\{Y_k^n \in Z_{n,\ell}, Y_j^m \in Z_{m,\ell}\right\}\right) \leq \sum_{\ell=1}^M \overline{\lambda_n}(Z_{n,\ell})\overline{\lambda_m}(Z_{m,\ell}) = \frac{1}{M} \to 0.$$

■

3 確率積分 (Stochastic Integrals)

3.1 Wiener 過程を用いた確率積分 (伊藤積分)

以下では, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ は零集合を全て含み, 右連続な情報系とする.

$(B_t)_{t\geq 0}$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動 (単に, BM と書く.); $B_0 = 0$ a.s. として, 時間は最後には $t \in [0,\infty)$ とするが, 初めは, $t \in [0,T]$ として考える. このとき, $f(t) = f(t,\omega)$ を $[0,T]\times\Omega$ 上で, $(\mathcal{F}_t)$-適合, $dtP(d\omega)$ に関して L^2-可積分として, **確率積分 (Stochastic integrals, Ito integrals)**

$$\int_0^t f(r)dB_r = \int_0^t f(r,\omega)dB_r(\omega)$$

を定義する. 但し, 最終的には f は次まで拡張される.

$$f = f(t) = f(t,\omega) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} \overset{\mathrm{def}}{\iff} f : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^1;\ \text{可測で, } (f(t))_{t\geq 0} \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-適合,}$$
$$\int_0^t f(r)^2 dr < \infty \text{ a.s. for } {}^\forall t > 0.$$

しかし, 本質的には, ${}^\forall T > 0$ までに時間を制限し, 最初に述べた $f = f(t) = f(t,\omega)$ で定義できれば良い. 即ち,

$$f \in \mathcal{L}^2_T \overset{\mathrm{def}}{\iff} f : [0,T]\times\Omega \to \mathbf{R}^1;\ \text{可測で, } (f(t)) \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-適合, } \int_0^t Ef(r)^2 dr < \infty \text{ for } {}^\forall t \leq T.$$

確率積分 $\displaystyle\int_0^t f(r,\omega)dB_r(\omega)$ は, BM が有限変動でないため, パスごとに (つまり, ω を固定するごとに), Riemann 積分のように定義することは出来ない. そこで, 簡単に説明すると, 測度 $dtP(d\omega)$ の下で, 時間に関する右連続な階段関数を元にして, L^2-近似により, $f \in \mathcal{L}^2_T$ まで拡張して定義する.

そこで,

・**定義過程** $f(t,\omega) = f_a(\omega)1_{(a,b]}(t); a < b; a, b \in [0,T]$, f_a は有界 $\mathcal{F}_a$ 可測.

・**階段過程** $f \in \mathcal{S}$ は時間について素な定義過程の有限和, i.e.

$$f(t,\omega) = \sum_{k=1}^n f_{t_{k-1}}(\omega)1_{(t_{k-1},t_k]}(t),\ \text{簡単に,}\ \ f(t) = f_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^n f_{t_{k-1}}1_{(t_{k-1},t_k]}(t), .$$

但し, $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n = T$, $f_{t_{k-1}}$ は有界で, $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-可測.

ここで, ノルム $\|\cdot\|_T$ を次で定義する.

$$\|f\|_T^2 := \int_0^T Ef(t)^2 dt.$$

命題 3.1 $\mathcal{S}$: dense in $\mathcal{L}^2_T$ under $\|\cdot\|_T$, i.e., ${}^\forall f \in \mathcal{L}^2_T, {}^\exists f_n \in \mathcal{S}; \|f - f_n\|_T \to 0$.

これの証明には, 可測な確率過程が $(\mathcal{F}_t)$-適合なら, 発展的可測なバージョンをもつことを用いる. ちなみに, **発展的可測 (progressively m'ble)** とは ${}^\forall t > 0$ に対し, $(s,\omega) \in ([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t) \mapsto f(s,\omega) \in (\mathbf{R}, \mathcal{B}^1)$ が可測な時をいう. これを用いたくなければ, $\mathcal{L}^2_T$ の定義で, $(\mathcal{F}_t)$-適合の代わりに, 発展的可測を仮定しておくという手もある.

[証明] まず, $f \in \mathcal{L}^2_T$ に対し, $f1_{\{|f|\leq n\}}$ を考えることにより, f は初めから有界として良い. 更に, ${}^\forall\varepsilon > 0$, 次を考えることにより, f は連続としても良い.

$$f_\varepsilon(t,\omega) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{((t-\varepsilon)\vee 0,t]} f(r,\omega)dr \quad \text{このとき } f_\varepsilon \to f \text{ in } \mathcal{L}^2_T.$$

($g_t \in L^2([0,T])$ が L^2-連続, i.e, $\int_{[0,T]} |g(t+\varepsilon)-g(t)|^2 dt \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) を用いるが, これ自身は, $C_{\subset} L^2$ が稠密による.) この時, 発展的可測から, $f\varepsilon$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合となることに注意. 従って, 有界連続な $f \in \mathcal{L}_T^2$ に対し,

$$f_n(t,\omega) = \sum_{k=1}^n f(t_{k-1},\omega) 1_{(t_{k-1},t_k]}(t), \quad t_k = \frac{k}{n}T$$

を考えれば, $f_n \in \mathcal{S}$ で, 有界連続性により, $\|f - f_n\|_T \to 0$ となる. ■

(参考) 右連続 (左連続) な $(\mathcal{F}_t)$-adapted 確率過程は, 発展的可測となる. 実際, $t > 0$ を固定して, $f_n(r,\omega) = \sum_{k=1}^n f(t_k,\omega) 1_{(t_{k-1},t_k]}(r)$ ($t_k = \frac{k}{n}t$) を考えれば, $\mathcal{B}^1([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測で, 右連続性より, 元の確率過程に概収束するので極限もそうなる.

階段過程 $f(t) = \sum_{k=1}^n f_{t_{k-1}} 1_{(t_{k-1},t_k]}(t)$ に対し,

$$M_t(f) \equiv \int_0^t f(r) dB_r := \sum_{k=1}^n f_{t_{k-1}} (B_{t_k \wedge t} - B_{t_{k-1} \wedge t})$$

と定義する.

注意 3.1 舟木 [2] の初版では, 右連続な階段過程; $f(t) = \sum_{k=1}^n f_{t_{k-1}} 1_{[t_{k-1},t_k)}(t)$ に対して, 同じ定義を与えている. これは同じ確率積分を定義することになるが, それは BM で (連続マルチンゲールで) 考えているからで, 後で述べる、Poisson 配置での確率積分では, 左連続な階段過程が必要となる. さらにそれを $(\mathcal{F}_t)$-可予測というものに拡張するが, 可測で $(\mathcal{F}_t)$-adapted なら,$(\mathcal{F}_t)$-可予測なバージョンはとれるので, ここでも, そこまで制限しても構わない. 実際, $\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^t f(r,\omega) dr$ が可予測バージョンとなる.

このとき, 次が成り立つ.

命題 3.2 $\{M_t(f)\}$ は連続で, $EM_t(f) = 0, EM_t(f)^2 = \int_0^t Ef(r)^2 dr$. しかも, $s < t$ なら, $E[M_t(f) |\, \mathcal{F}_s] = M_s(f)$ a.s., i.e.,

$$E\int_0^t f(r)dB_r = 0, E\left(\int_0^t f(r)dB_r\right)^2 = \int_0^t Ef(r)^2 dr, E\left[\int_0^t f(r)dB_r \middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s f(r)dB_r \text{ a.s.}$$

つまり, $\mathcal{M}_{c,0}^2$ を $M_0 = 0$ a.s. を出発する連続な L^2-(可積分な)martingale 全体とすれば, ; $\{M_t(f)\} \in \mathcal{M}_{c,0}^2$, かつ,

$$\langle M(f), M(g)\rangle_t = \int_0^t f(r)g(r)dr.$$

ここで, $\langle M(f), M(g)\rangle_t$ については, 連続な L^2-mart. $(M_t), (N_t)$ に対し, M_t^2 は連続劣マルチンゲールで, しかもクラス (DL) に属するので, Doob-Meyer の分解定理より, $^\exists A_t$; $A_0 = 0$ なる連続増加過程, $M_t^2 - A_t$ がマルチンゲールとなる. これを $A_t = \langle M\rangle_t$ と表し, (M_t) **の 2 次変分 (quadratic variation) 過程**という. さらに,

$$\langle M,N\rangle_t := \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t) = \frac{1}{2}(\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t)$$

と定義すると, これは, 有界変動で, $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ は連続 mart. となる. これを (M_t) **と** (N_t) **の 2 次変分**という. ちなみに, 分割 $\Delta; 0\ t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ に対し, 次が成り立つ.

$$\langle M\rangle_t = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \quad \text{(in prob.)}$$

Brown 運動については, $\langle B\rangle_t = t$ である.

[証明] f が定義過程 $f(t) = f_a(\omega)1_{[a,b)}(t)$ の時, $M(f)_t = f_a(B_{t\wedge b} - B_{t\wedge a})$ で, 連続で, $M(f)_0 = 0$ は明らか. マルチンゲール性; $0 \le s < t$ に対し, $E[M(f)_t|\ \mathcal{F}_s] = M(f)_s$ a.s. について.

$$E[M(f)_t - M(f)_s|\ \mathcal{F}_s] = E[f_a(B_{t\wedge b} - B_{t\wedge a} - B_{s\wedge b} + B_{s\wedge a})|\ \mathcal{F}_s]$$

で, $s \le a$ なら, $E[E[f_a(B_{t\wedge b} - B_{t\wedge a})|\ \mathcal{F}_a]|\ \mathcal{F}_s] = E[f_a E[(B_{t\wedge b} - B_{t\wedge a})|\ \mathcal{F}_a]|\ \mathcal{F}_s] = 0$. $s > a$ なら, $E[f_a(B_{t\wedge b} - B_{s\wedge b})|\ \mathcal{F}_s] = f_a E[B_{t\wedge b} - B_{s\wedge b}|\ \mathcal{F}_s] = 0$. よって, $E[M(f)_t - M(f)_s|\ \mathcal{F}_s] = 0$ a.s. 更に 2 次変分については,

$$E\left[M(f)_t M(g)_t - M(f)_s M(g)_s - \int_s^t f(r)g(r)dr\,\middle|\ \mathcal{F}_s\right] = 0$$

を示せば良い. 実際, これから $\langle M(f)\rangle_t = \displaystyle\int_0^t f(r)^2 dr, \langle M(f+g)\rangle_t = \int_0^t (f+g)^2(r)dr$ が分るから, 結果を得る. $g(t) = g_c 1_{[c,d)}(t)$ として, $a \le c$ として良い. 後は $s \le c, s > c$ で場合分けして上と同様に示せる. ■

後は, 一般の $f \in \mathcal{L}_T^2$ に対し, 階段過程 f_n で近似してやれば, $^\forall t \in [0,T]$ に対し, $L^2(dP)$ の元で, $M(f_n)_t$ が Cauchy 列となり, L^2 空間の完備性より, 極限 $M(f)_t$ が存在し, しかも, $(M(f)_t)$ は連続過程となることも示せる ($\to$ 最後に). これを確率積分 $\displaystyle\int_0^t f(r)dB_r := M(f)_t$ として定義する. この確率積分は, $f \in \mathcal{S}$ のときと同じ性質を満たす. 即ち,

定理 3.1 $f, g \in \mathcal{L}_T^2$ に対し,

$$\left(M(f)_t = \int_0^t f(r)dB_r\right)_t \in \mathcal{M}_{0,c}^2, \quad \langle M(f), M(g)\rangle_t = \int_0^t f(r)g(r)dr.$$

更に, $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^2$ に対しては,

$$\sigma_n = \inf\left\{t > 0; \int_0^t f(r)^2 dr > n\right\}$$

として, $f_n(t) := f(t\wedge\sigma_n) \in \mathcal{L}_T^2$ となるので, $M(f)_t = \lim M(f(\cdot\wedge\sigma_n))_t$ が定義できる. ($^\forall\omega, ^\exists N = N(\omega) \ge 1; ^\forall n \ge N, \sigma_n(\omega) = T$ となることに注意.) このとき, $M(f)_{t\wedge\sigma_n} = M(f(\cdot\wedge\sigma_n))_t$ を満たす. 更に, $(M(f)_t) \in \mathcal{M}_{0,c}^{2,\mathrm{loc}}$; 0 を出発する連続な局所 L^2-martingale となる.

「$(M(f)_t)$ が連続過程となること」について (文献 [1])

まず, 一般に, rcll マルチンゲール (M_t) に対し, $|M|_T^* := \sup_{0\le t\le T}|M_t|$ として, **連続時間マルチンゲール不等式**: $\||M|_T^*\|_p \le p/(p-1)\|M_T\|_p$ $(p > 1)$ が成り立つ. (実際, 任意の有限個の有理時点と最後の時点 T に対し, 離散の劣マルチンゲール不等式を用いて (文献 [3] の定理 3.6, 系 3.2), $aP(\sup_{t\in[0,T]\cap\mathbf{Q}}|M_t| \ge a) \le E|M_T|$ が成り立ち, 右連続性から, $aP(\sup_{t\le T}|M_t| \ge a) \le E|M_T|$. 更に, これを用いることにより, 離散時と同様に, 上の不等式が示せる.)

これと, Borel-Cantelli を用いて, $^\exists(M_t)$: 連続過程, $^\exists\{m_k\}; |M(f_{m_k}) - M|_T^* \to 0$ a.s. $(k \to \infty)$ が示せる. 実際, $\||M(f_n) - M(f_m)|_T^*\|_2^2 = E[(|M(f_n) - M(f_m)|_T^*)^2] \to 0$ $(m, n \to \infty)$ より, $^\exists\{m_k\}; P(|M(f_{m_{k+1}}) - M(f_{m_k})|_T^* \ge 1/2^k) \le 1/2^k$ が取れて, B-C's Lem. より, $^\forall\ell > k \ge 1, |M(f_{m_\ell}) - M(f_{m_k})|_T^* \le \sum_{j=k}^{\ell-1} 1/2^j \le 1/2^{k-1} \to 0$ $(k \to \infty)$ a.s. 即ち, $M(f_{m_k})$ は a.s. で, $C([0,T])$ の Cauchy 列となり, 完備性から, $^\exists M = M(f)$: 連続過程; $|M(f) - M(f_{m_k})|_T^* \to 0$ a.s. 更に, 次が示せる: $n \to \infty$ のとき,

$$\||M(f_n) - M(f)|_T^*\|_2^2 \le 4 \varliminf_{k\to\infty} \|M(f_n)_T - M(f_{m_k})_T\|_2^2 = 4 \varliminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{m_k}\|_T^2 = 4\|f_n - f\|_T^2 \to 0$$

実際, $^\forall n \geq 1$ を固定し, 上の部分列 $\{m_k\}$ に対し, $|M(f_n)-M(f)|_T^* \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} |M(f_n)-M(f_{m_k})|_T^*$ 一方, Fatou により, $\| \underline{\lim}_{k\to\infty} |M(f_n) - M(f_{m_k})|_T^*\|_2^2 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \||M(f_n) - M(f_{m_k})|_T^*\|_2^2 \leq 4\|M(f_n)_T - M(f_{m_k})_T\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} 4\|f_n - f_{m_k}\|_T^2 = 4\|f_n - f\|_T^2$. 従って, $\||M(f_n)-M(f)|_T^*\|_2^2 \leq 4\|f_n - f\|_T^2 \to 0$ $(n\to\infty)$.

[別証 (Borel-Cantelli を用いない証明)]
$t \in [0,T]$ を止める毎には, $\{M(f_n)_t\}$ は $L^2(dP)$ での Cauchy 列なので, L^2-極限 $M_t = M(f)_t$ はある. これから $D := [0,T]\cap \mathbf{Q}$ に対し, 適当な部分列 $\{m_k\}$ を対角線論法を用いてとれば, 確率 1 で, $^\forall r \in D, M(f_{m_k})_r \to M_r$ とできる. 実際, $D = \{r_j\}$ として, r_1 で概収束する部分列 $\{m_{1,k}\}$ をとり, 次に r_2 で概収束する更なる部分列 $\{m_{2,k}\} \subset \{m_{1,k}\}$ をとり, と順に $\{m_{j,k}\}$ をとり, $m_k = m_{k,k}$ とすれば, $M(f_{m_k})$ が全ての有理時点 $r = r_j$ で収束する確率が 1 となる.
更に, このとき, $M^n = M(f_n)$, $|M|_D^* := \sup_{r\in D}|M_r|$ として, Fatou により,

$$\||M^n - M|_D^*\|_2^2 \leq \| \varliminf_{k\to\infty} |M^n - M^{m_k}|_D^*\|_2^2 \leq \varliminf_{k\to\infty} \||M^n - M^{m_k}|_D^*\|_2^2 \leq 4\|f_n - f\|_T^2 \to 0\ (n\to\infty).$$

従って, 適当な部分列 $\{n_k\}$ を取れば, . $|M(f_{n_k}) - M|_D^* \to 0$ a.s. よって, $\{M_r\}_{r\in D}$ は D で連続となる. そこで, $t \in D^c := [0,T]\cap \mathbf{Q}^c$ に対し, $M_t := M_{t+}$ として右連続拡張してやれば, $|M(f_{n_k}) - M|_T^* = |M(f_{n_k}) - M|_D^* \to 0$ a.s. (これより, $\{M_t = M(f)_t\}$ は $[0,T]$ 上で連続), かつ, $\||M(f_n) - M|_T^*\|_2 = \||M(f_n) - M|_D^*\|_2 \to 0$ $(n\to\infty)$ を得る. ■

この証明により, $M = (M_t) \in \mathcal{M}_{c,0}^2$ で $t \in [0,T]$ に制限した空間に, ノルム $\|M\| := \||M|_T^*\|_2 = (E[\sup_{t\leq T}|M_t|^2])^{1/2}$ を定義すれば, 完備で, 上の確率積分は, この中で定義される.
次節で, 補正された Poisson 配置による確率積分のときには, 近似列は rcll なので, 極限も rcll となる.

問 上の最後の証明で, $t \in D^c := [0,T]\cap \mathbf{Q}^c$ に対し, M_{t+} が存在することを示せ. (ちなみにこれは, $M^n = M(f_n)$ が rcll でも同様である.)
[解] M^n が rcll のときに, $|M - M^n|_D^* \to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立っているとして示せば, 十分. $D_n^+(t) := \{r \in D; t < r \leq t + 1/2^n\}$ とおき,

$$\underline{M_{t+}} := \lim_{n\to\infty} \inf_{r\in D_n^+(t)} M_r, \quad \overline{M_{t+}} := lim_{n\to\infty} \sup_{r\in D_n^+(t)} M_r$$

として, $\underline{M_{t+}} = \overline{M_{t+}}$ を示せば良いが, これは, $M^n \rightrightarrows M$ on D と, M_n が r-c であることから容易に示せる.
余談だが, $[0,T]$ 上の連続関数列 $\{f_n = f_n(t)\}$ が D 上で一様収束していれば, 極限関数 f は, D 上で一様連続だが, f_n が rcll のときは, f は D 上で, rcll だが, 「一様右連続」までは言えない.

3.2 Poisson 配置を用いた確率積分

$\nu(dz)$ を $\mathbf{R}^m$ 上の Lévy 測度, 即ち, 次を満たすものとする.

$$\nu(\{0\}) = 0, {}^\forall n \geq 1, \nu(|z| \geq 1/n) < \infty$$

$N(dt,dz)$ を $dtd\nu$-Poisson 配置, つまり, 平均測度 $\widehat{N}(dt,dz) := E[N(dt,dz)] = dt\nu(dz)$ をもつ $[0,\infty)\times\mathbf{R}^m$ 上の Poisson 配置とする. 与えられた情報系 $(\mathcal{F}_t)$ について, 任意の $0 \leq s < t, U \in \mathcal{B}^m$

に対し, $N((s,t]\times U)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立を満たすものとする. さらに $\widetilde{N} := N - \widehat{N}$ を**補正された Poisson 配置 (compensated Poisson random measure)** という.

また, (τ_k, ξ_k) を $N(dt,dz)$ の台＝質点とすると

$$N(dt,dz) = \sum \delta_{(\tau_k,\xi_k)}(dt,dz).$$

このとき, τ_k は a.s. で値が異なるが, 必ずしも小さい順に番号付けされているわけではない. また, $|\xi_k| \geq 1/n$ なる k の数は a.s. で有限である.

$f(t,z) = f(t,z,\omega)$, $g(t,z) = g(t,z,\omega)$ は $\mathbf{R}^d$ に値をとり, $(t,z,\omega) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^m \times \Omega$ に関し, $(\mathcal{F}_t)$-可予測であるとする. 即ち, $\mathcal{P}$ を 次の (1) (2) を満たす関数 $h(t,z,\omega)$ を全て可測にする最小の σ-filed として, f, g が $\mathcal{P}$-可測とする. このとき f, g は **$(\mathcal{F}_t)$-可予測 (predictable)** であるという.

(1) $^\forall(z,\omega)$, $t \mapsto h(t,z,\omega)$ は左連続. (2) $^\forall t > 0$, $(z,\omega) \mapsto h(t,z,\omega)$ は $\mathcal{B}^m \otimes \mathcal{F}_t$-可測,

(注) Poisson 配置での積分は, $N((s,t]\times U)$ が $\mathcal{F}_s$ と独立という性質を用いて定義できるので, 左連続な階段過程が基本となる. 従って, それを拡張して, 可予測なものまで, となる.

更に, 次の積分条件を満たすとする.

$$^\forall t > 0,\ \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} |f(r,z)|\nu(dz) < \infty \quad \text{a.s.},$$

$$^\forall t > 0, \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} |g(r,z)|^2\nu(dz) < \infty \quad \text{a.s.}$$

但し, 時間については, $0+$ から $t+$ まで, つまり $(0,t]$ 上の積分とする. 即ち, $\int_0^t = \int_{0+}^{t+} = \int_{(0,t]}$. また, 連続のときと同様に,

$$\eta_n := \inf\left\{t > 0; \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} |f(r,z)|\nu(dz) > n\right\},\ \sigma_n := \inf\left\{t > 0; \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} |g(r,z)|^2\nu(dz) > n\right\}$$

に対し, $^\forall t > 0$ を 1 つ固定し, $0 < r \leq t$ に対し, $r \wedge \eta_n$, $r \wedge \sigma_n$ で置き換えたものを考えることにより, 次を満たすものに定義すればよい.

$$^\forall t > 0,\ \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} E|f(r,z)|\nu(dz) < \infty.$$

$$^\forall t > 0,\ \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} E|g(r \wedge \sigma_n, z)|^2\nu(dz) < \infty.$$

このとき, まず,

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} f(r,z)N(dr,dz) := \sum_{k;\tau_k \leq t} f(\tau_k, \xi_k)$$

と定義する. 明らかに rcll となる.

次が成り立つ. $0 \leq s < t$ に対し,

$$E[X_t|\ \mathcal{F}_s] = X_s + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^m} E[f(r,z)|\ \mathcal{F}_s] dr\nu(dz).$$

また,

$$E|X_t| \leq \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} E|f(r,z)|\nu(dz) < \infty.$$

さらに g に対しては,

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz) := L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{|z|\geq 1/n} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz).$$

と定義する. このとき, Y_t は平均 0 の rcll L^2-martingale となる i.e.,

$$E\left[\int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s \int_{\mathbf{R}^m} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz).$$

しかも,

$$E\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz)\right)^2\right] = \int_0^t dr \int_{\mathbf{R}^m} Eg(r,z)^2 \nu(dz).$$

(これは, Brown 運動での確率積分と同様に, 近似列が rcll なので, 極限もそうなる.)

一般の g については, $Y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} g(r\wedge\sigma_n, z)\widetilde{N}(dr,dz)$. と定義する. これは rcll 局所 L^2-martingale となる, 即ち, $Y_{t\wedge\sigma_n}$ が rcll L^2-martingale で, 上の性質を満たす.

証明は, 簡単のため, $m=1$ として, $T>0$ に対し, 時間を $[0,T]$ に制限して, 次の命題により, $f(r,z)$ が次の左連続な階段関数のときに示せば十分なので, 前半は容易である.

$$f(r,z) = \sum_{k=1}^{2^n} f(r_{k-1}^n) 1_{(r_{k-1}^n, r_k^n]}(r) 1_U(z)$$

($r_k^n = kT/2^n$, $f(t) = f(\omega;t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合, $U \in \mathcal{B}^1; \nu(U) < \infty$ である.)

命題 3.3 $\mathbf{F}$ が, 有界で可測な実数値関数 $f(t,z,\omega)$ のある線形空間で, 次の 2 つを満たすなら, 有界な可予測関数を全て含む.

(1) $\mathbf{F}$ は次の $f(t,z,\omega)$ を全て含む; f は左連続 in $t\geq 0$, $\mathcal{B}^m \otimes \mathcal{F}_t$-可測 in (z,ω).

(2) $f_n \in \mathbf{F}; \uparrow f \Longrightarrow f \in \mathbf{F}$

(証明は節の最後に与える.)

$g(r,z)$ も同様であるが, マルチンゲールについて示そう.

$$E\left[\int_s^t \int_{\mathbf{R}} g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = 0 \text{ a.s.}$$

を示せば良い. $(s,t]$ を 2^n 個に分割して $\{r_k^n\}$ で表し, 階段関数で近似する. その際, $Z_n = \{|z| \geq 1/n\}$ に制限して, $U \in \mathcal{Z}_n = \mathcal{B}^m \cap Z_n$ をとる. 次が成り立つことから分る. $s \leq r_{k-1}^n < r_k^n \leq t$ に注意.

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_s^t \int_{\mathbf{R}} g(r_{k-1}^n) 1_{(r_{k-1}^n, r_k^n]}(r) 1_U(z)\widetilde{N}(dr,dz) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\quad = E\left[E\left[g(r_{k-1}^n)\widetilde{N}((r_{k-1}^n, r_k^n]\times U) \,\middle|\, \mathcal{F}_{r_{k-1}}\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\quad = E\left[g(r_{k-1}^n) E\left[\widetilde{N}((r_{k-1}^n, r_k^n]\times U)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = 0 \text{ a.s.}
\end{aligned}$$

最後の 2 つの等号は, N の独立性からの次による.

$$E\left[\widetilde{N}((r_{k-1}^n, r_k^n]\times U) \,\middle|\, \mathcal{F}_{r_{k-1}}\right] = E\left[\widetilde{N}((r_{k-1}^n, r_k^n]\times U)\right] = 0$$

後は, $g_n(r,z)=g(r,z)1_{|z|\ge 1/n}$ として L^2-近似して考えれば良く, 容易に示せる. 実際,

$$E\left[\int_s^t\int_{\mathbf{R}}g_n(r,z)\widetilde{N}(dr,dz)\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right]=0\text{ a.s.}$$

として, g でも成り立つことを示すのに, ${}^\forall A\in\mathcal{F}_s$ に対し,

$$E\left[\int_s^t\int_{\mathbf{R}}g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz);A\right]=0$$

を示せば良いが, 最後の 2 乗平均の式から次が分る.

$$\begin{aligned}\left(E\left[\int_s^t\int_{\mathbf{R}}g(r,z)\widetilde{N}(dr,dz);A\right]-E\left[\int_s^t\int_{\mathbf{R}}g_n(r,z)\widetilde{N}(dr,dz);A\right]\right)^2&\\=\int_s^t dr\int_{\mathbf{R}}E[(g_n(r,z)-g(r,z))^2 1_A]\nu(dz)\to 0.&\end{aligned}$$

ちなみに最後の 2 乗平均の式についても, 階段関数のとき, 展開すると項は, $j\le k$ に対し,

$$g(r_{k-1}^n)\widetilde{N}((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)g(r_{j-1}^n)\widetilde{N}((r_{j-1}^n,r_j^n]\times U)$$

となり, $j<k$, i.e., $j\le k-1$ なら $g(r_{j-1}^n)\widetilde{N}((r_{j-1}^n,r_j^n]\times U)g(r_{k-1}^n)$ と $\widetilde{N}((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)$ が独立で, 後者の平均が 0 となる. $j=k$ なら, 再び独立性より,

$$E[g(r_{k-1}^n)^2\widetilde{N}((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)^2]=E[g(r_{k-1}^n)^2]E[\widetilde{N}((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)^2]$$

で,

$$E[\widetilde{N}((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)^2]=EN((r_{k-1}^n,r_k^n]\times U)=(r_k^n-r_{k-1}^n)\nu(U)$$

となり, 求める式を得るので, 後は L^2-近似すれば良い. ■

[命題 3.3 の証明] 簡単のため, 変数 $z\in\mathbf{R}^m$ がない時を示す. (例えば, $\mathbf{F}$ の定義で, $\mathcal{B}^m\otimes\mathcal{F}_t$ を $\mathcal{F}_t$ に変えて考えれば良い.)

まず, $\mathcal{D}\subset 2^{[0,\infty)\times\Omega}$ が **Dynkin 族 (d-system)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(i) $[0,\infty)\times\Omega\in\mathcal{D}$.

(ii) $A,B\in\mathcal{D}; A\subset B\Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{D}$.

(iii) $A_n\in\mathcal{D}\uparrow\Rightarrow\bigcup A_n\in\mathcal{D}$.

このとき, 任意の $\mathcal{C}\subset 2^{[0,\infty)\times\Omega}$ を含む最小の d-system が存在し, $d(\mathcal{C})$ と表す.

次が成り立つ.

補題 3.1 $\mathcal{C}\subset 2^{[0,\infty)\times\Omega}$ が, 有限個の共通部分をとる演算に関して閉じているなら, $d(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$.

証明は容易である. (次の問.)

これを用いて命題 3.3 を示そう. 有界な非負可予測関数は, 非負可予測単関数の増加列で近似できるので, ${}^\forall A\in\mathcal{P}, 1_A\in\mathbf{F}$ を示せば良い. そこで, $A\in\mathcal{P}'\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}1_A\in\mathbf{F}$ と定義すると, これは Dynkin 族となる. そこで, $k\le n$ に対し, (Y_t^k) を左連続な $(\mathcal{F}_t)$-adapted 過程, $B_k\in\mathcal{B}^1$ として, $\bigcap_{k\le n}\{Y_t^k\in B_k\}$ の形の集合全体を $\mathcal{C}$ とすれば, $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}'$ が示せるので, $d(\mathcal{C})\subset\mathcal{P}'$ で, 上の補題より, $d(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{P}$ となり, $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$ を得る. $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}'$ については, $n=1$, i.e., $A_t=\{Y_t\in B\}\in\mathcal{P}'$ を示せば十分だが, ${}^\exists\varphi_n$: 非負連続関数 on $\mathbf{R}^1$, $0\le\varphi_n\uparrow 1_B$ がとれて, $1_{A_t}=1_B(Y_t)=\lim\varphi_n(Y_t)$ となり, 右辺は $\mathbf{F}$ の元となる. ■

問 3.1 上の補題を証明せよ. (証明は「単調族定理」のと同様である.)

σ-加法族は Dynkin 族なので, $d(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ は明らか. 逆は, $d(\mathcal{C})$ が, σ-加法族となることを示せば良い. 更にそれは $A, B \in d(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in d(\mathcal{C})$ を示すことに帰着する. 任意に固定した $A \in d(\mathcal{C})$ に対し,

$$\mathcal{D}_A = \{B \subset [0, \infty) \times \Omega; A \cap B \in d(\mathcal{C})\}.$$

とおく. すると, $A \in d(\mathcal{C})$ なら, $\mathcal{D}_A$ が Dynkin 族となり, $d(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_A$ を得て, 主張を得る. 実際, $B_1, B_2 \in \mathcal{D}; B_1 \subset B_2$ なら, $A \cap (B_2 \setminus B_1) = (A \cap B_2) \setminus (A \cap B_1) \in d(\mathcal{C})$. $B_n \in \mathcal{D}_A; \uparrow$ なら, $A \cap (\bigcup B_n) = \bigcup (A \cap B_n) \in d(\mathcal{C})$ を満たす. 従って, 仮定とこれらより, $A \in \mathcal{C}$ なら $\mathcal{D}_A \supset d(\mathcal{C})$, 即ち, $B \in d(\mathcal{C})$ なら, $B \in \mathcal{D}_A$ より, $A \cap B \in d(\mathcal{C})$ となり, 今度は A と B を入れ替えて考えれば, $A \in d(\mathcal{C})$ なら $\mathcal{D}_A \supset d(\mathcal{C})$ となる. ■

3.3 伊藤の公式 1 (連続型)

(X_t) を $\mathbf{R}^d$ に値をとり, x を出発し, 次の確率積分によって定義される確率過程とする.

$$X_t(\omega) = x + \int_0^t a(r, \omega) dr + \int_0^t b(r, \omega) dB_r(\omega).$$

成分で表せば, $X_t = (X_t^i) = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$;

$$X_t^i = x^i + \int_0^t a^i(r) dr + \int_0^t \sum_{j \le N} b_k^i(r) dB_r^k.$$

但し, $B_t = (B_t^k)_{k \le N}$: N 次元 Brown 運動で,

・$a(t) = a(t, \omega) = (a^i(t, \omega))_{i \le d}$: $(\mathcal{F}_t)$-adapted; ${}^\forall T > 0, \displaystyle\int_0^T |a(t)| dt < \infty$ a.s.

・$b(t) = b(t, \omega) = (b_k^i(t, \omega))_{i \le d, k \le N}$: $(\mathcal{F}_t)$-adapted; ${}^\forall T > 0, \displaystyle\int_0^T \|b(t)\|^2 dt < \infty$ a.s., 即ち, $\{b(t)\}_{t \ge 0} \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{loc}}^2$. 但し,

$$b(t) dB_t = \sum_{k \le N} b_k^i(t) dB_t^k, \quad \|b(t)\|^2 = \sum_{i,k} (b_k^i)^2(t)$$

とする. これを簡単に, 次のように表す. (あくまで形式的なものだが, 計算上は非常に都合が良い.)

$$dX_t = a(t) dt + b(t) dB_t.$$

このとき, **伊藤の公式 (Ito's formula)** は, 次で与えられる: $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R}^d)$ に対し,

$$d\varphi(X_t) = a(t) \cdot D\varphi(X_t) dt + b(t) \cdot D\varphi(X_t) dB_t + \frac{1}{2} b^2(t) \cdot D^2 \varphi(X_t) dt, \quad \varphi(X_0) = x.$$

但し, $a(t) \cdot D = a^i(t) \partial_i$, $b^2(t) \cdot D^2 = \sum_{k \le m} b_k^i(t) b_k^j \partial_{ij}^2$ (更に, 上と下にある添字については和をとるものとする, 即ち, $i, j = 1, \ldots, d$ についても和をとる). また $\partial_i = \partial / \partial x_i, \partial_{ij}^2 = \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$.

$d = 1, N = 1$ とすれば,

$$d\varphi(X_t) = \varphi'(X_t) a(t) dt + \varphi'(X_t) b(t) dB_t + \frac{1}{2} \varphi''(X_t) b(t)^2 dt.$$

大雑把に説明すると, もし φ が Taylor 展開可能なら, 形式的には, 次が成り立つことを用いる.

$$(dB_t)^2 = dt, (dt)^2 = dt dB_t = 0, \text{ これ以上の積は全て } 0.$$

これより, $(dX_t)^2 = b(t)^2 dt$ かつ $^\forall n \geq 3, (dX_t)^n = 0$ となるので, 次のように結果を得る.

$$\begin{aligned} d\varphi(X_t) &= \varphi'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)(dX_t)^2 \\ &= \varphi'(X_t)\{a(t)dt + b(t)dB_t\} + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)b(t)^2 dt. \end{aligned}$$

また, もし, $\varphi(t,x) \in C_b^{1,2}([0,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ とすると, $\varphi(0, X_0) = \varphi(0, x)$,

$$d\varphi(t, X_t) = \partial_t \varphi(t, X_t)dt + a(t) \cdot D\varphi(t, X_t)dt + b(t) \cdot D\varphi(t, X_t)dB_t + \frac{1}{2}b^2(t) \cdot D^2\varphi(t, X_t)dt$$

を満たす. これは, 上の多次元版で, $\widetilde{X_t} = (t, X_t)$ として, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \subset \mathbf{R}^{d+1}$ に値をとる確率過程として考えれば良い. (第一成分は $t = \int_0^t ds$ としてみる.)

[証明] $d = N = 1$ のときだけ示す. $a(r), b(r)$ が階段過程として示せば十分で, しかも, その時間分割の小区間に含まれる微小区間 $[s,t]$ で考えると, 共に, $r \in [s,t]$ について一定かつ, a.s. で有界な $a(s), b(s) \in \mathcal{F}_s$ であるとして良い. そこで, $[s,t]$ を n 等分して考えるが, 本質的には $s = 0$ で考えるのと変わらないので, 共に $a_0, b_0 \in \mathcal{F}_0$ かつ, a.s. で有界として, $[0,t]$ を n 等分し, $t_k = t_k^n = tk/n, k = 0, 1, \ldots, n$ とおく. Taylor の定理から,

$$\varphi(X_{t_k}) - \varphi(X_{t_{k-1}}) = \varphi'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2}\varphi''(Y_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

但し, ${}^\exists\theta = \theta(\omega) \in (0,1)$; $Y_k = X_{t_{k-1}} + \theta(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$.

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = a_0(t_k - t_{k-1}) + b_0(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

後はラフに言って, $n \to \infty$ のとき, a.s. や in L^2 等の意味で,

$$\begin{aligned} &X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \to a(t)dt + b(t)dB_t \\ &(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \to (a(t)dt + b(t)dB_t)^2 = b(t)^2 dt \end{aligned}$$

を示せば良い. 実際には,

$$\varphi(X_t) - \varphi(X_0) = \sum_{k=1}^n (\varphi(X_{t_k}) - \varphi(X_{t_{k-1}})) = \sum_{j=1}^5 I_n^j$$

と分け, $\varphi \in C_b^2$ (φ'' も有界) と仮定して考えると, $n \to \infty$ のとき, 次を得る.

$$\begin{aligned}
I_n^1 &= \sum_{k=1}^n \varphi'(X_{t_{k-1}})a_0(t_k - t_{k-1}) \to \int_0^t \varphi'(X_r)a(r)dr \quad \text{a.s.}, \\
I_n^2 &= \sum_{k=1}^n \varphi'(X_{t_{k-1}})b_0(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \to \int_0^t \varphi'(X_r)b(r)dB_r \quad \text{in } L^2, \\
I_n^3 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\varphi''(Y_k)b_0^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_r)b^2(r)dr \quad \text{in } L^2, \\
I_n^4 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\varphi''(Y_k)a_0 b_0(t_k - t_{k-1})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \to 0 \quad \text{a.s.}, \\
I_n^5 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\varphi''(Y_k)a_0^2(t_k - t_{k-1})^2 \to 0 \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

適当な部分列を取れば, 全て a.s. で成り立つので, 求める式を得る.

I_n^4 については, B_r の連続性から $\max|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \to 0$ a.s. が, $I_n^5 \to 0$ については, $t_k - t_{k-1} = 1/n \to 0$ が効くので明らか. I_n^1, I_n^2, I_n^3 について示す. I_n^1 は, $\varphi'(X_r)$ が r について連続なので,

$$I_n^1 \to a_0 \int_0^t \varphi'(X_r)dr = \int_0^t \varphi'(X_r)a(r)dr \quad \text{p.w.}$$

I_n^2 は階段過程 $f_n(r) = \sum_{k=1}^n \varphi'(X_{t_{k-1}})1_{(t_{k-1},t_k]}(r)$ によって, $I_n^2 = b_0 \int_0^t f_n(r)dB_r$ と表され, φ' 有界, $\varphi'(X_r)$ 連続なので, $\|f_n(r) - \varphi'(X_r)1_{(0,t]}(r)\|_T \to 0$. よって,

$$I_n^2 = b_0 \int_0^t f_n(r)dB_r \to b_0 \int_0^t \varphi'(X_r)dB_r = \int_0^t \varphi'(X_r)b(r)dB_r \quad \text{in } L^2.$$

I_n^3 については, $\psi = \varphi'' \in C_b(\mathbf{R})$ に対し,

$$\sum_{k=1}^n \psi(Y_k)(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \to \int_0^t \psi(X_r)dr \quad \text{in } L^2$$

を示せば良いが, X_r と ψ の連続性から, $\max_{1\le k\le n} E|\psi(Y_k) - \psi(X_{t_{k-1}})|^2 \to 0$ で, ψ の有界性と

$$E\left(\sum_{k=1}^n \{(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\}\right)^2 = \sum_{k=1}^n E\{(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\}^2 = \frac{t^2}{n} \to 0$$

より, 明らか.

最後に, $\varphi \in C^2$ のとき, $\sigma_n = \inf\{t > 0; |X_t| \ge n\}$ として, $X_{t\wedge\sigma_n}$ を考えば, 有界な範囲 $\{|x| \le n\}$ では φ', φ'' 共に有界なので, Ito の公式が成り立ち, $n \to \infty$ とすれば良い. ■

3.4 伊藤の公式 2 (ジャンプ型)

$\nu(dz)$ を $\mathbf{R}^m$ 上の Lévy 測度, 即ち, 次を満たすものとする.

$$\nu(\{0\}) = 0, {}^\forall n \ge 1, \nu(|z| \ge 1/n) < \infty$$

$N(dt,dz)$ を $dtd\nu$-Poisson 配置, つまり, 平均測度 $\widehat{N}(dt,dz) := E[N(dt,dz)] = dt\nu(dz)$ をもつ $[0,\infty) \times \mathbf{R}^m$ 上の Poisson 配置とする. さらに $\widetilde{N} := N - \widehat{N}$ を補正された Poisson 配置とする.

$f(t,z) = f(t,z,\omega)$, $g(t,z) = g(t,z,\omega)$ は $\mathbf{R}^d$ に値をとる $(\mathcal{F}_t)$-可予測関数で, 更に, 次の積分条件を満たすとする.

$$ {}^\forall t > 0, \quad \int_0^t dr \int_{|z|\ge 1} |f(r,z)|\nu(dz) < \infty \quad \text{a.s.},$$

$$ {}^\forall t > 0, \int_0^t dr \int_{|z|<1} |g(r,z)|^2\nu(dz) < \infty \quad \text{a.s.}$$

(X_t) を x を出発し, 次で定義される確率過程とする. a, b は前節と同じで,

$$dX_t(\omega) = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dB_t(\omega) + \int_{|z|\ge 1} f(t,z,\omega)N(\omega;dt,dz) + \int_{|z|<1} g(t,z,\omega)\widetilde{N}(\omega;dt,dz),$$

このとき**伊藤の公式（ジャンプ型）** は次で与えられる: $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R}^d)$ に対し,

$$\begin{aligned}
d\varphi(X_t) \quad = \quad & a(t)\cdot D\varphi(X_t)dt + b(t)\cdot D\varphi(X_t)dB_t + \frac{1}{2}b^2(t)\cdot D^2\varphi(X_t)dt \\
& + \int_{|z|\ge 1} [\varphi(X_{t-} + f(t,z)) - \varphi(X_{t-})]N(dt,dz) \\
& + \int_{|z|<1} [\varphi(X_{t-} + g(t,z)) - \varphi(X_{t-})]\widetilde{N}(dt,dz) \\
& + \int_{|z|<1} [\varphi(X_{t-} + g(t,z)) - \varphi(X_{t-}) - g(t,z)\cdot D\varphi(X_{t-})]\nu(dz)dt
\end{aligned}$$

注: Ikeda-Watanabe [5] では, $|z| \ge 1, |z| < 1$ と分けずに, $fg = 0$ を仮定して, f, g は全領域 $z \in \mathbf{R}$ での積分で定義している.

また, もし $\varphi(t,x) \in C_b^{1,2}([0,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ のときは, 連続型と同様に, 時間微分の項 $\partial_t\varphi(t,X_t)dt$ が付く.

特に, ジャンプのみの場合, i.e., $a=0, b=0$ として, 次のようになる.

$$\begin{aligned} dX_t &= \int_{|z|\geq 1} f(t,z)N(dt,dz) + \int_{|z|<1} g(t,z)\widetilde{N}(dt,dz), \\ d\varphi(X_t) &= \int_{|z|\geq 1} [\varphi(X_{t-}+f(t,z)) - \varphi(X_{t-})]N(dt,dz) \\ &\quad + \int_{|z|<1} [\varphi(X_{t-}+g(t,z)) - \varphi(X_{t-})]\widetilde{N}(dt,dz) \\ &\quad + \int_{|z|<1} [\varphi(X_{t-}+g(t,z)) - \varphi(X_{t-}) - g(t,z)\cdot D\varphi'(X_{t-})]\nu(dz)dt. \end{aligned}$$

証明は簡単のため, $d=m=1$ として, $a=0, b=0$ のときを考える. そうでないときでも, 連続型の結果を用いれば, 容易に示せる. また, 係数の条件も次の時に示せば十分.

$$\int_0^t dr \int_{|z|\geq 1} E|f(r,z)|\nu(dz) < \infty, \quad \int_0^t dr \int_{|z|<1} E|g(r,z)|^2\nu(dz) < \infty.$$

まず, $g=0$ なら, X_t は pure jump 過程で, $\varphi(X_t)$ も大きさ $f(r,z)$ の jump のみで変化するので,

$$\begin{aligned} \varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \sum_{r\leq t; \Delta X_r \neq 0} (\varphi(X_r) - \varphi(X_{r-})) = \sum_{r\leq t; \Delta X_r \neq 0} (\varphi(X_{r-}+f(r,z)) - \varphi(X_{r-})) \\ &= \int_0^t \int_{|z|\geq 1} (\varphi(X_{r-}+f(r,z)) - \varphi(X_{r-}))N(dr,dz). \end{aligned}$$

$g \neq 0$ のとき, 簡単のため $f=0$ で考えるが, そうでない場合でも, 上の項を加えれば同じである.

$$dX_t^n := \int_{1/n\leq |z|<1} g(t,z)\widetilde{N}(dt,dz)$$

とすると,

$$dX_t^n := \int_{1/n\leq |z|<1} g(t,z)N(dt,dz) - \int_{1/n\leq |z|<1} g(t,z)dt\nu(dz)$$

と分けて表すことが出来る. これをそれぞれ, $dX_t^n = d(X_t^n)^d + d(X_t^n)^c = \Delta X_t^n + d(X_t^n)^c$ と表す. $\Delta X_t^n = X_t^n - X_{t-}^n$, i.e, $X_t^n = X_{t-}^n + \Delta X_t^n$. このとき, もし, $N(\{(t,z)\}) = 1$ なら, $\Delta X_t^n = g(t,z)$ で, $\Delta\varphi(X_t^n) = \varphi(X_t^n) - \varphi(X_{t-}^n) = \varphi(X_{t-}^n + g(t,z)) - \varphi(X_{t-}^n)$ となる. 以下で, $Z_n = \{1/n \leq |z| < 1\}$ とする.

$$\begin{aligned} &\varphi(X_t^n) - \varphi(X_s^n) = \int_s^t \varphi'(X_r^n)d(X_r^n)^c + \sum_{r;\Delta X_r^n \neq 0} \Delta\varphi(X_r^n) \\ &= -\int_s^t \int_{Z_n} \varphi'(X_r^n)g(r,z)dr\nu(dz) + \int_s^t \int_{Z_n} [\varphi(X_{r-}^n + g(r,z)) - \varphi(X_{r-}^n)]N(dt,dz) \\ &= -\int_s^t \int_{Z_n} \varphi'(X_r^n)g(r,z)dr\nu(dz) + \int_s^t \int_{Z_n} [\varphi(X_{r-}^n + g(r,z)) - \varphi(X_{r-}^n)]\widetilde{N}(dr,dz) \\ &\qquad + \int_s^t \int_{Z_n} [\varphi(X_{r-}^n + g(r,z)) - \varphi(X_{r-}^n)]dr\nu(dz) \\ &= \int_s^t \int_{Z_n} [\varphi(X_{r-}^n + g(r,z)) - \varphi(X_{r-}^n)]\widetilde{N}(dr,dz) \\ &+ \int_s^t \int_{Z_n} [\varphi(X_{r-}^n + g(r,z)) - \varphi(X_{r-}^n) - \varphi'(X_r^n)g(r,z)]dr\nu(dz) \end{aligned}$$

よって, $n \to \infty$ として考えれば, 適当な部分列に対し, a.s. 収束極限として, 求める式を得る. 実際, まず, X^n はマルチンゲールなので, マルチンゲール不等式を用いれば, $\sup_{t \le T} |X_t - X_t^n| \to 0$ in L^2 が言えて, 適当な部分列をとれば, 概収束する. この部分列に対し, 上の第 1 項は l^2 収束し, 第 2 項は概収束するので, さらに部分列を取れば, どちらも概収束する. ■

4 確率微分方程式 (SDE; Stochastic Differential Equations)

まず, 簡単のため 1 次元 $(d = m = 1)$ で考える. $a(t,x), b(t,x), f(t,x,z), g(t,x,z); g(t,x,0) = 0$ を状態空間 $\mathbf{R}^1$ に値をとる, 時間, 空間, ジャンプパラメータ $(t, x.z) \in [0.T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ に対する適当な関数とする. (伊藤の公式の時とは異なり, ω に依存しないことに注意.)

確率微分方程式とは, 次の式で与えられる $\mathbf{R}^1$ に値をとる確率過程 X_t を解として持つものをいう. $X_0 = x$ として,

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t + \int_{|z|\geq 1} f(t,X_{t-},z)N(dt,dz) + \int_{|z|<1} g(t,X_{t-},z)\widetilde{N}(dt,dz).$$

このとき, $X_0 = x$ を初期条件, a, b, f, g を係数という. (Lévy 測度 ν も加えて, a, b, f, g, ν を係数という場合もある.)

各項は, それぞれ, 瞬間的な時間変化 (率) を表すが, a は時間と共に, b は Brown 運動と共に, f は大きいジャンプと共に, g は小さいジャンプと共にどう変わるかを表している. (ちなみに, 大きいジャンプは, 有限時間では a.s. で有限個しかない.)

f, g がないとき, i.e, $f = g = 0$ のとき, **連続型 (continuous type)** といい, そうでなければ, **飛躍型=ジャンプ型 (jump type)** という. また, $a = b = 0$ のときは, **純飛躍型 (pure jump type)** という.

『微分方程式』というが, 上の式は実は, 形式的なもので, 数学としては, 本当は, 次の『積分』の形で意味を持つので, 『確率積分方程式』と呼ぶべきなのだが, 微分の方が感覚的に分かり易いので, その形で表し, そう呼ぶことにしたのだろう.

$$\begin{aligned} X_t = x + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} f(s,X_{s-},z)N(ds,dz) \\ + \int_0^t \int_{|z|<1} g(s,X_{s-},z)\widetilde{N}(ds,dz). \end{aligned}$$

4.1 連続型確率微分方程式

$d \geq 1, N \geq 1$ とする. $B_t = (B_t^i)_{i\leq N}$: N 次元 Brown 運動; $B_0 = 0$ とする.

$(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d$ の Borel 関数 a, b を, $a = a(t,x) = (a^i(t,x))_{i\leq d}$: d 次元ベクトル値, $b = b(t,x) = (b_k^i(t,x))_{i\leq d, k\leq N}$: $d \times N$ 行列値とする. $X_0 = x \in \mathbf{R}^d$ とする.

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t.$$

成分で表すと

$$dX_t^i = a^i(t,X_t)dt + \sum_{k=1}^N b_k^i(t,X_t)dB_t^k, \quad 1 \leq i \leq d.$$

a をドリフト (ズレ) 係数, b を拡散係数という. (ちなみに「ドリフト」とは漂泊、漂流という意味があるが, ここでは, 外力によって, 時間変化に比例するズレを表す.)

積分形では,

$$X_t = x + \int_0^t a(r,X_r)dr + \int_0^t b(r,X_r)dB_r.$$

成分で表すと

$$X_t^i = x^i + \int_0^t a^i(r,X_r)dr + \sum_{k=1}^N \int_0^t b_k^i(r,X_r)dB_r^k, \quad 1 \leq i \leq d.$$

$|a|^2 = (a^1)^2 + \cdots + (a^d)^2$, $\|b\|^2 = \sum_{i \le d,, k \le N} (b^i_k)^2$ とおく.

定理 4.1 連続型確率微分方程式において, 係数が, 空間変数 x について, 1 次増大, かつ, Lipschitz 連続性を持てば, i.e., ${}^\forall T > 0, {}^\exists K = K_T > 0; {}^\forall t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^d$,

$$|a(t,x)| + \|b(t,x)\| \le K(1+|x|), \qquad |a(t,x) - a(t,y)| + \|b(t,x) - b(t,y)\| \le K|x-y|$$

を満たせば, 解 $(X_t)_{t \ge 0}$ は一意的に存在し, 連続過程で, しかも, $(X_t) \in \mathcal{L}^2$ を満たす. 即ち, ${}^\forall T > 0, \int_0^T E|X_t|^2 dt < \infty$.

ここでいう一意とは, $(\widetilde{X_t})$ も解なら, 強同等, i.e., $P(X_t = \widetilde{X}_t, {}^\forall t \ge 0) = 1$.

[証明] Picard の逐次近似法を用いる. 近似列 $X^n = (X^n_t)$ を次で定める. $X^1_t = x$ として, X^n が決まったとして,

$$dX^{n+1}_t = a(t, X^n_t)dt + b(t, X^n_t)dB_t, \quad X^{n+1}_0 = x.$$

このとき, 次も満たす. $X^n = (X^n_t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-adapted,

$$E\left[\sup_{t \le T} |X^n_t|^2\right] < \infty.$$

これから X^{n+1} は well-defined となり, しかも次が示せる. ${}^\forall T > 0, {}^\forall n \ge 1$,

$$E\left[\sup_{t \le T} |X^{n+1}_t - X^n_t|^2\right] \le C_2 \frac{(C_1 t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

従って, $\{X^n\}$ が a.s. で一様収束し, その極限を $X = (X_t)$ とすれば, $\|\cdot\|_T$ のもとでも収束することになるので, SDE の解であることも分る.

最後に一意性については, 解が $X, \widetilde{X}$ と 2 つあり, $\tau_L = \inf\{t \ge 0; |X_t| \vee |\widetilde{X}_t| \ge L\}$ とおくと, 上と同様に,

$$E|X_{t \wedge \tau_L} - \widetilde{X}_{t \wedge \tau_L}|^2 \le C_1 \int_0^t E|X_{r \wedge \tau_L} - \widetilde{X}_{r \wedge \tau_L}|^2 dr.$$

よって Gronwall の不等式 (次の命題) により,

$$E|X_{t \wedge \tau_L} - \widetilde{X}_{t \wedge \tau_L}|^2 = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

を得て, $X, \widetilde{X}$ の連続性より, $P({}^\forall t \le T, X_{t \wedge \tau_L} = \widetilde{X}_{t \wedge \tau_L}) = 1$ と $\tau_L \to \infty$ a.s. が言えるので, 結局, 強同等となる. ■

命題 4.1 (Gronwall の不等式) $[0,T]$ 上の連続関数 $g(t)$ に対し,
${}^\exists C_1, C_2 \ge 0;\ 0 \le g(t) \le C_1 + C_2 \int_0^t g(r)dr \Rightarrow g(t) \le C_1 e^{C_2 t}$

[証明] $h(t) = C_2 e^{-C_2 t} \int_0^t g(r)dr$ とおけば, 仮定より, $h'(t) \le C_1 C_2 e^{-C_2 t}$ を得る. $h(0) = 0$ より, $[0,t]$ で積分して, $h(t) \le C_1(1 - e^{-C_2 t})$. 再び仮定により, 求める式を得る. ■

4.2 ジャンプ型確率微分方程式

ジャンプ型は, 連続型にジャンプ項を加えたものとなるが, 係数 f, g は $(t,x,z) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^m$ の Borel 関数で, $f = f(t,x,z) = (f^i(t,x,z))_{i \le d}; f = 0$ on $|z| < 1$,
$g = g(t,x,z) = (g^i(t,x,z))_{i \le d}; g(t,x,0) = 0$ かつ $g = 0$ on $|z| \ge 1$ なるものとする. SDE は

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t + \int_{|z| \ge 1} f(t, X_{t-}, z)N(dt,dz). + \int_{|z|<1} g(t, X_{t-}, z)\widetilde{N}(dt,dz).$$

$\nu(dz)$ は $\mathbf{R}^m$ 上の測度で, $^\forall n \geq 1, \nu(|z| \geq 1/n) < \infty$ を満たす. $N(dt,dz)$ は $dt\nu(dz)$-Poisson r.m., $\widehat{N}(dt,dz) = dt\nu(dz)$, $\widetilde{N} = N - \widehat{N}$ である. f については次を仮定しておく.

$$^\forall t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \int_0^t dr \int_{|z|\geq 1} |f(r,x,z)|\nu(dz) < \infty.$$

定理 4.2 ジャンプ型 SDE において, 連続型の係数 (a,b) の条件に加えて, $^\forall T > 0, {}^\exists K = K_T > 0; {}^\forall t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^d$,

$$\int_{|z|<1} |g(t,x,z)|^2 \nu(dz) \leq K(1+|x|^2),$$

$$\int_{|z|<1} |g(t,x,z) - g(t,y,z)|^2 \nu(dz) \leq K|x-y|^2$$

を満たせば, 解 $(X_t)_{t\geq 0}$ は一意的に存在し, D 過程である. 更に, もし $f = 0$ なら, $(X_t) \in \mathcal{L}^2$ を満たす.

[証明] 連続型の時と同様に示せるが, 大きなジャンプを扱うために, $^\forall T > 0$, $N([0,T] \times \{|z| \geq 1\}) < \infty$ a.s. なので, $T = \infty$ まで考えて, その質点を $(\tau_k, \xi_k); 0 < \tau_k \uparrow\uparrow \infty$ とする.

まず, $f = 0$ のときの解 Y_t^1 の存在は, 連続型と同様に示せる. そこで, $X_t^1 = Y_t^1$ for $t \in [0,\tau_1)$, $X_t^1 = Y_{\tau_1}^1 + f(\tau_1, Y(\tau_1-), \xi_1)$ if $t = \tau_1$), とおく. 次に Y_t^2 を $t \in [0, \tau_2 - \tau_1]$ の範囲で, $Y_0^2 = X_{\tau_1}^1$ を出発する $B_t^{\tau_1} := B_{t+\tau_1} - B_{\tau_1}$, $N^{\tau_1}(dt,dz) := N(dt + \tau_1, dz)$ に関して X_t^1 と同様にして決まる解とする. (但し, 方程式の時間変数 r も $r + \tau_1$ に変えておく.) $X_t^2 = X_t^1$ if $t \in [0.\tau_1]$, $X_t^2 = Y_{t-\tau_1}^2$ if $t \in [\tau_1, \tau_2]$ とおけば, $[0,\tau_2]$ での解となる. ここで, Y_t^2 の定義は, より正確には, τ_1 をまず, ランダムでない時間 s に変えて, 出発点も $^\forall x \in \mathbf{R}^d$ で考え, その時の解 $Y_t^2 = Y_t^2(\omega; x, s)$ に対し, $s = \tau_1(\omega), x = X_{\tau_1(\omega)}^1(\omega)$ を代入して定義する. 以下, この操作を続けて, 解 X_t が, $X_t = X_t^k$ for $t \in [0,\tau_k]$ で定義され, これが求める一意解となる. ■

[補足] $[X_t^2$ が $t \in [0,\tau_2]$ で, 特に $t \in (\tau_1, \tau_2]$ で解となること$]$ $\tau_1 = s$ として, $t \in [0, \tau_2 - s)$ であれば,

$$\begin{aligned} Y_t^2 - X_s^1 &= \int_0^t a(r+s, Y_r^2)dr + \int_0^t b(r+s, Y_r^2)dB_r^s + \int_0^t \int_{|z|<1} g(r+s, Y_{r-}^2, z)\widetilde{N}^s(dr,dz) \\ &= \int_s^{t+s} a(r, Y_{r-s}^2)dr + \int_s^{t+s} b(r, Y_{r-s}^2)dB_r + \int_s^{t+s} \int_{|z|<1} g(r, Y_{(r-s)-}^2, z)\widetilde{N}(dr,dz) \end{aligned}$$

ここで, 固定した $s \geq 0$ に対し, $(B_r^s = B_{r+s} - B_s) \overset{\text{(d)}}{=} (B_r)$ を用いている. しかも,

$$\int_0^t b(r+s, Y_r^2)dB_r^s = \int_0^t b(r+s, Y_r^2)d(B_{r+s} - B_s) = \int_s^{t+s} b(r, Y_{r-s}^2)dB_r.$$

従って $t \in [s, \tau_2)$ に対しては, $X_t^2 = Y_{t-s}^2$ が上の Y_t^2 と同じになり, 元の方程式の解となる. 当然, $X_{\tau_2}^2 = Y_{\tau_2-s}^2 + f(\tau_2, Y_{(\tau_2-s)-}, \xi_2)$ である.

5 推移確率と生成作用素 (Transition Probabilities and Generators)

(X_t, P_x) を $\mathbf{R}^d$ 上の x を出発する時間的一様なマルコフ過程とする. このとき有界 Borel 関数 φ に対し,

$$P_t(x, dy) := P_x(X_t \in dy), \quad P_t\varphi(x) := E_x[\varphi(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(y) P_t(x, dy)$$

とおく. $P_t(x, dy)$ を**推移確率**, といい, このとき $(P_t)_{t \ge 0}$ は有界連続関数全体 $C_b \equiv C_b(\mathbf{R}^d)$ 上の**推移半群 (transition semi-group)** となる. 即ち,

$$P_0 = I, P_s P_t = P_{s+t} \ (s, t \ge 0)$$

を満たす. 更に (X_t) が $D \equiv D(\mathbf{R}^d)$ に見本関数をもつ Markov 過程であれば, $\lim_{t \downarrow 0} P_t\varphi(x) = \varphi(x)$, i.e., $\lim_{t \downarrow 0} P_t \to I$ on C_b も満たす. 当然, 右連続性 $P_{t+h} \to P_t$ $(h \downarrow 0)$ on C_b for ${}^\forall t \ge 0$ も持つ.

逆に (P_t) が右連続 on C_b なら, (X_t) の確率右連続性, i.e., ${}^\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_{t+h} - X_t| < \varepsilon) \to 1$ $(h \downarrow 0)$ for ${}^\forall t \ge 0$ も言える. 実際, $\varphi \in C_b$ を $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 1$ if $|x| \ge \varepsilon$ ととると,

$$P(|X_{t+h} - X_t| \ge \varepsilon) \le E[\varphi(X_{t+h} - X_t)] = E[\int \varphi(y - x) P_h(x, dy)|_{\ x = X_t}] \to E[\varphi(0)] = 0.$$

5.1 生成作用素

以下, (P_t) は C_b 上の右連続半群とする.

生成作用素 L on $\mathcal{D}(L) \subset C_b$:

$$L := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P_h - I), \quad \text{i.e.,} \quad L\varphi(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P_h\varphi(x) - \varphi(x))$$

とおく. ここで, $\varphi \in \mathcal{D}(L)$ は上の極限が存在するような $\varphi \in C_b$ 全体で考える. このとき, 形式的には $P_t = e^{tL}$ で与えられる.

更に推移確率が $0 \le s \le t$ に対し, $P_{s,t}(x, dy) = P(X_t \in dy|\ X_s = x)$ として, 時間依存するとき, $P_{s,s} = I$, $P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}$ を満たす. 右連続性についても同様で, 仮定しておく. このとき, 生成作用素も時間依存し, $L_t = \lim_{h \downarrow 0}(P_{t,t+h} - I)/h$ on $\mathcal{D}(L_t)$ として定義する. また形式的には, $P_{s,t} = \exp[\int_s^t L_r dr]$ で与えられる.

次のような関数空間を考える.

・$\varphi \in C_b^2 \equiv C_b^2(\mathbf{R}^d) \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists \partial_{ij}^2 \varphi \in C_b \ (i, j \le d)$. 但し $\partial_{ij}^2 = \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ である.

・$\varphi \in C_c^\infty \overset{\text{def}}{\iff} \varphi \in C^\infty$, supp φ: compact.

定理 5.1 (X_t) を $X_0 = x$ を出発する前節のジャンプ型確率微分方程式の解とする, i.e., 係数 (a, b, f, g) は定理 4.2 と同じ条件を満たすとして,

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t + \int_{|z| \ge 1} f(t, X_{t-}, z) N(dt, dz). + \int_{|z| < 1} g(t, X_{t-}, z) \widetilde{N}(dt, dz).$$

このとき, $\varphi \in C_b^2$ に対し, その生成作用素は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
L_t\varphi(x) &= a^i(t,x)\partial_i\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} b_k^i b_k^j(t,x)\partial_{ij}^2\varphi(x) \\
&\quad + \int_{|z|\ge 1}[\varphi(x+f(t,x,z)) - \varphi(x)]\nu(dz) \\
&\quad + \int_{|z|<1}[\varphi(x+g(t,x,z)) - \varphi(x) - \partial_i\varphi(x)g^i(t,x,z)]\nu(dz).
\end{aligned}
$$

但し, 上で添字が上下にあるものについては和をとることとする, e.g. $a^i x_i = \sum_{i\le d} a^i x_i$ である.

[証明]　簡単のため $d=1$ で考えると, これは, Ito の公式を $\varphi(X_{t+h})$ に適用して,

$$
\begin{aligned}
\varphi(X_{t+h}) - \varphi(X_t) &= \int_t^{t+h}\varphi'(X_s)d(X_s)^c + \frac{1}{2}\int_t^{t+h}\varphi''(X_s)d(X_s^2)^c \\
&+ \int_t^{t+h}\int_{|z|\ge 1}[\varphi(X_{s-}+f(s,X_{s-},z)) - \varphi(X_{s-})]\,N(ds,dz) \\
&+ \int_t^{t+h}\int_{|z|<1}[\varphi(X_{s-}+g(s,X_{s-},z)) - \varphi(X_{s-})]\,\widetilde{N}(ds,dz). \\
&+ \int_t^{t+h}\int_{|z|<1}[\varphi(X_{s-}+g(s,X_{s-},z)) - \varphi(X_{s-}) - \varphi'(X_{s-})g(s,X_{s-},z)]\,ds\nu(dz).
\end{aligned}
$$

但し, $d(X_s)^c = a(s,X_s)ds + b(s,X_s)dB_s$, $d(X_s^2)^c = (dB_s)^2 = ds$.

$P_{t,t+h}\varphi(x) = E[\varphi(X_{t+h})|\ X_t = x]$, 即ち,

$$
P_{t,t+h}\varphi(x) - \varphi(x) = E[\varphi(X_{t+h}) - \varphi(X_t)|\ X_t = x]
$$

に注意すれば, dB_s と $\widetilde{N}$ の確率積分が平均 0 となることから, 求める生成作用素の式を得る.　■

一番簡単な例は, Brown 運動で, $X_t = x + B_t$ とすれば, 時間的一様なので, $L_t \equiv L = \triangle_x/2$.

また, 全ての係数が時間と空間に依存しないとき, 時間的空間的一様な Markov 過程となり, これは **Lévy 過程** と呼ばれるものとなり, 特に $f = g = z$ $(m = d)$ であれば, ν は次を満たす.

$$
\nu(\{0\}) = 0, \quad \int_{\mathbf{R}^d}(1\wedge|z|^2)\nu(dz) < \infty.
$$

生成作用素は

$$
L\varphi = a\cdot D\varphi + \frac{1}{2}b^2\cdot D^2\varphi + \int_{\mathbf{R}^d}[\varphi(\cdot+z) - \varphi(\cdot) - z\cdot D\varphi(\cdot)1_{|z|<1}]\nu(dz)
$$

で与えられる. 但し, $a\cdot D = a^i\partial_i$, $b^2\cdot D^2 = \sum_k b_k^i b_k^j \partial_{ij}^2$ である.

また, その特性関数は

$$
E[e^{i\xi\cdot X_t}] = e^{t\Psi(\xi)}; \quad \Psi(\xi) = ia\cdot\xi - \frac{1}{2}b^2\cdot\xi^2 + \int\left[e^{iz\cdot\xi} - 1 - iz\cdot\xi 1_{|z|<1}\right]\nu(dz).
$$

但し, $\xi \in \mathbf{R}^d$, $b^2\cdot\xi^2 = \sum_k b_k^i b_k^j \xi_i\xi_j$ である.

5.2 マルチンゲール問題

前節の確率微分方程式の解を**強解 (string solution)** という. より正確には, 既に与えられた確率空間のもとで, 確率微分方程式の解が存在すれば, それをいう.

逆に, 係数 (a, b, f, g, ν) が与えられたとき, 適当な確率空間のもとで, 確率微分方程式の解が与えられたとき, **弱解 (weak solution)** という.

一般に, 作用素 L_t が与えられたとき, これに対応する推移半群 $P_{s,t}$ が存在するかどうかは難しい問題で, 簡単ではない (その定義域 $D(L_t)$ の決定も含めて. たとえ, L_t が係数 a, b, f, g と Lévy 測度 $\nu(dx)$ によって, 前の定理の形の式 (5.1) で与えられていたとしても).

以下, L_t は (5.1) の形で与えられているとする. またその定義域を $D(L_t)$ とする. 但し, これは状況に応じて $\bigcap_{t>0} D(L_t)$ の意味で使うこともある.

そこで, もう少し条件を加えて, 次のような問題の定式化をし, それを **マルチンゲール問題** という. 更に, その解が存在し, 一意であるとき, 解は **well-posed (適切)** であるという.

$\Omega = D([0, \infty))$ 上で, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$; $\mathcal{C}$ は cylinder set 全体, i.e.,

$$C \in \mathcal{C} \overset{\text{def}}{\iff} C = \{(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n}, \quad (0 \le t_1 < \cdots < t_n, A_{t_j} \in \mathcal{B}^1, n \ge 1)$$

また, $\mathcal{F}_t^0$ も同様に時刻 $t \ge 0$ までの cylinder sets 全体で生成される σ-加法族として, $\mathcal{F}_t := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0$ とする.

任意に固定した, $x \in \mathbf{R}^d$ に対し, この $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$ 上に, ある確率測度 $P = P_x$ があり, $X_t(\omega) = \omega(t)$ に対し, 次を満たすとき $\{P_x\}_x$ を**マルチンゲール問題の解**という. 適当な関数空間 D_0 (C_c^∞ や C_b^2 など) に対し,

(1) $P(X_0) = x$

(2) $^\forall \varphi \in D_0$, $M(\varphi) := \varphi(X_t) - \varphi(x) - \int_0^t L_r \varphi(X_r) dr$ が $(\mathcal{F}_t)$-martingale となる.

当然, この解は Markov 過程で, その生成作用素は L_t となる.

明らかに弱解ならマルチンゲール問題の解となるが, 逆も言えるので同値である. また, このとき, 上の関数空間 $D_0 \subset D(L_t)$ は, これだけで生成作用素から推移半群が決定できるので, (L_t) の**核 (core)** という.

今, P_x をマルチンゲール問題の解とする. $0 \le s < t$ に対し, $P_{s,t}\varphi(y) = E_x[\varphi(X_t) |\ X_s = y]$ なので,

$$P_{s,t}\varphi(y) - \varphi(y) = E_[\varphi(X_t) - \varphi(X_s) |\ X_s = y] = \int_s^t E_x[L_r\varphi(X_r)] |\ X_s = y] dr = \int_s^t P_{s,r} L_r \varphi(y) dr$$

となる. これから, 生成作用素が L_t となることが分る.

更に, t で微分すれば,

$$\partial_t P_{s,t}\varphi(x) = P_{s,t} L_t \varphi(x) = \int L_t \varphi(y) P_{s,t}(x, dy).$$

以下、簡単のため $d = 1$ で時間的一様な場合について考える. ここで, もし $P_t(x, dy) = p_t(x, y) dy$ と密度関数を持ち, $\partial_y p, \partial_y^2 p$ と $\partial_t p$ が y について有界とする. 更に, L が連続型 $(f = g = 0)$ で, 係数 a, b が C_b^2 であれば, $\varphi \in C_c^2$ に対し, (部分積分によって)

$$\int \varphi(y) \partial_t p_t(x, y) dy = \int \varphi(y) L^* p_t(x, y) dy.$$

即ち, $\partial_t p_t(x,y) = L^* p_t(x,y)$ a.e. が成り立つ. ここで, L^* は L の共役作用素で, 次で与えられる.

$$L^*p(y) = -\partial_i \left(a^i(y)p(y)\right) + \frac{1}{2}\partial_{ij}^2 \left(\sum_{k\le N} b_k^i b_k^j(y)p(y)\right).$$

また, X_t の出発点を固定せずに X_0 でランダムとしておけば, $u(t,y) = E[p_t(X_0,y)]$ に対し, 同様な条件の下で, $\partial_t u = L^* u$ a.e. を満たす. (これは上で, 時間で微分する前の式を初期分布で積分したものから, 同じ計算で導かれる.)

参考文献

[1] 伊藤 清 著 「確率論」, 岩波書店 (1953).

[2] 舟木 直久 著 「確率微分方程式」, 岩波書店 (1997, 第 2 刷 2000).

[3] 平場　誠示 著 「確率過程論の基礎」, ProbB.pdf (2023).
http://hiraba.starfree.jp/Math/index.html

[4] カラザス, シュレーブ著「ブラウン運動と確率積分」, シュプリンガー,

[5] N. Ikeda, S. Watanabe "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes", 2nd Ed., Holland-Kodansha (1988, 2nd.ed. 1991).