

# 線形代数学 I (Linear Algebra I)

平場 誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

## 目次

<b>0 導入 (Introduction)</b>	<b>2</b>
<b>1 数ベクトル空間 (Numerical vector spaces)</b>	<b>1</b>
1.1 集合, 写像, 関数 . . . . .	1
1.2 $n$ 次元実ベクトル空間, 一次独立, 実ベクトルの内積 . . . . .	2
1.3 空間ベクトルの外積 . . . . .	4
1.4 一般の体上の数ベクトル空間 . . . . .	5
<b>2 行列 (Matrix)</b>	<b>5</b>
2.1 行列の定義, 行列の積 . . . . .	5
2.2 いろいろな行列, 転置行列, 行列のトレース . . . . .	6
2.3 線形写像としての行列 . . . . .	7
2.4 逆行列 . . . . .	7
<b>3 平面・空間の線形変換 (Linear transforms on the plane or the space)</b>	<b>8</b>
3.1 2 次行列の逆行列, 平面上の回転と鏡映 . . . . .	8
3.2 直交行列 . . . . .	9
3.3 3 次の逆行列, 複素平面 . . . . .	9
<b>4 行列式の定義 (Definition of determinant)</b>	<b>11</b>
4.1 一般の行列の行列式と逆行列 . . . . .	11
4.2 行列式の定義 . . . . .	11
<b>5 行列式の性質 (Properties of determinant)</b>	<b>13</b>
5.1 行列式の一般的性質, 転置行列の行列式, 積の行列式 . . . . .	13
5.2 余因子展開 . . . . .	14
5.3 逆行列, いろいろな行列式の計算 . . . . .	15
5.4 置換 . . . . .	17
<b>6 掃き出し法 (Sweeping out method)</b>	<b>19</b>
6.1 連立一次方程式の計算, 逆行列の計算 . . . . .	19
6.2 行列のランクの計算, 基本行列 . . . . .	20

7	ベクトル空間 (Vector spaces)	22
7.1	抽象ベクトル空間の定義, 一次独立性	22
7.2	部分空間	23
7.3	基底と次元	24
7.4	基底変換, 数ベクトル空間の基底	25
8	線形写像 (Linear mappings)	26
8.1	線形写像の定義, 線形写像の表現行列, 基底変換と表現行列	26
8.2	線形写像の像と核	27
8.3	ベクトル空間の同型	27
8.4	線形写像と行列のランク	28
9	連立一次方程式 (Simultaneous equations)	29
9.1	同次連立一次方程式の場合, 非同次の場合の解の存在	29
9.2	クラメールの公式	30

## 0 導入 (Introduction)

高校では, 2次元, 3次元のベクトル (平面ベクトル・空間ベクトル) については学んできたと思う。

大学では, これらを,  $n$ 次元まで一般化し, 更に, 次のようなベクトル空間まで, 拡張する。

ベクトル空間とは一般の集合  $V$  に対し, 次のように定義される。ここで「 $\forall \mathbf{a} \in V,$ 」とは「 $V$ の任意の元  $\mathbf{a}$  に対して」で, 「 $\exists \mathbf{a}' \in V; \sim$ 」は「ある  $V$  の元  $\mathbf{a}'$  が存在して  $\sim$ をみたす」と解釈する。

**定義 0.1**  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (場合によっては  $K = \mathbb{Q}$ )。

集合  $V$  が  $K$  ベクトル空間, もしくは 抽象  $K$  ベクトル空間  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  和と定数倍が定義され, それらについて普通の計算ができる, 即ち,  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall \alpha \in K, \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V, \alpha \mathbf{a} \in V;$

(和の結合則)  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$

(和の可換性)  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$

(零元の存在)  $\exists \mathbf{0} \in V; \forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}.$

(マイナスの存在)  $\forall \mathbf{a} \in V, \exists \mathbf{a}' \in V; \mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathbf{0}.$  この  $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$  と表す。

(1 によるスカラー倍)  $\forall \mathbf{a} \in V, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$

(スカラー倍の結合則)  $\forall \mathbf{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in K, \alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}.$

(分配則)  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall \alpha, \beta \in K, \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$

このとき,  $V$  の元をベクトル (vector),  $K$  の元をスカラー (scalar) という。

しかし, 成分が全て, 数である「数ベクトル空間」については, もっと簡単に定義ができる。