

線形代数学 II (Linear Algebra II)

平場 誠示 (Seiji HIRABA)

2018 年 5 月 3 日

目次

1	計量ベクトル空間 (metric vector space)	1
1.1	内積, 複素内積 (inner product, complex inner product)	1
1.2	直交基底, 随伴行列とグラム行列 (orthogonal basis, adjoint matrix and Gram matrix)	2
1.3	直交行列とユニタリ行列, 対称行列とエルミート行列 (orthogonal matrix and unitary matrix)	4
2	直和 (direct sum)	6
2.1	直積, 部分空間の和 (product, sum of subspaces)	6
2.2	直交補空間 (orthogonal complement)	8
2.3	線形変換の安定部分空間 (stable subspaces of linear transforms)	8
3	固有値 (eigen values)	9
3.1	固有値と固有空間, 固有多項式 (eigen value and eigen space, eigen polynomial)	9
3.2	ケーリー・ハミルトンの定理とフロベニウスの定理 (Cayley-Hamilton's theorem and Frobenius's theorem)	11
3.3	代数学の基本定理 (fundamental theorem in algebra)	12
4	対角化 (diagonalize)	13
4.1	対角化可能行列 (diagonalizable matrix)	13
4.2	ユニタリ行列とエルミート行列の固有値 (eigen values of unitary matrix and hermitian matrix)	14
4.3	正規行列 (normal matrix)	15
4.4	直交行列の標準形 (normal form of orthogonal matrix)	16
5	2 次形式 (quadratic form)	17
5.1	2 次形式の定義 (definition of quadratic form)	17
5.2	正定値 2 次形式 (positive definite quadratic form)	17
5.3	2 次形式の同値性 (equivalence of quadratic forms)	19
5.4	平面 2 次曲線, 空間 2 次曲面 (quadratic curve, quadratic surface)	21

6	最小多項式 (minimal polynomial)	21
6.1	最小多項式の定義 (definition of minimal polynomial)	21
6.2	対角化可能性の判定条件	22
6.3	2次行列の標準形, 3次行列の標準形 (normal forms of 2-dimensional matrix and 3dimensional matrix)	23
7	ジョルダン標準形 (Jordan normal form)	24
7.1	ジョルダンの定理 (Jordan's theorem)	24
7.2	直既約分解, 一般固有空間, フィッティングの補題 (Fitting's lemma, general eigen space, direct irreducible decomposition)	25
7.3	中山の補題, ベキ零変換 (Nakayama's lemma, nilpotent tranform)	27
7.4	ジョルダンの標準形の一意性 (uniqueness of Jordan's normal form)	29

本テキストでは数ベクトルは縦ベクトルとして, 数ベクトルと行列を次のように表す.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

またスペースの関係で縦に書くのが面倒なときは転置の記号を用いて $\mathbf{a} = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ と表すこともある. また添字の範囲が分っているときは簡単に $\mathbf{a} = (a_i), A = (a_{ij})$ と表す.